北京理工大学数理冬令营

力学知识体系总结

缪 劲 松

北京理工大学 物理学院

内 容

第一部分 运动学基本概念

第二部分 质点 动力学

第三部分 质点系 动力学

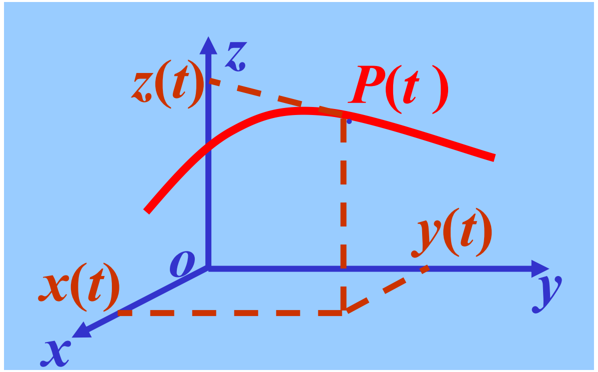
运动的性质 ： 矢量性、瞬时性、相对性

物体运动图像：随质心的平动 + 绕质心的转动

第一部分　运动学基本概念

一、运动的描述

矢量性、瞬时性、相对性

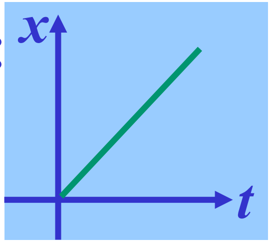


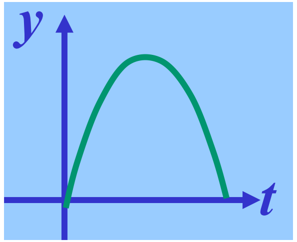
运动轨迹：在直角坐标系 O-xyz 中，运动轨迹可由**轨迹方程**表示出来：

$$x = f(y, z),\quad y = g(x, z)\ \text{或}\ z = h(x, y)$$

运动函数(方程): 坐标系中各坐标随时间的**变化函数**：

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$$





运动的叠加原理：质点的实际运动可看作是几个彼此独立的分运动的叠加，其遵守**矢量运算法则**。

1. 位置矢量 $\vec{r}$

质点的位置可用坐标 (x, y, z)表示，也可用矢径 $\vec{r}$ 表示。矢径也称为位置矢量，简称位矢。

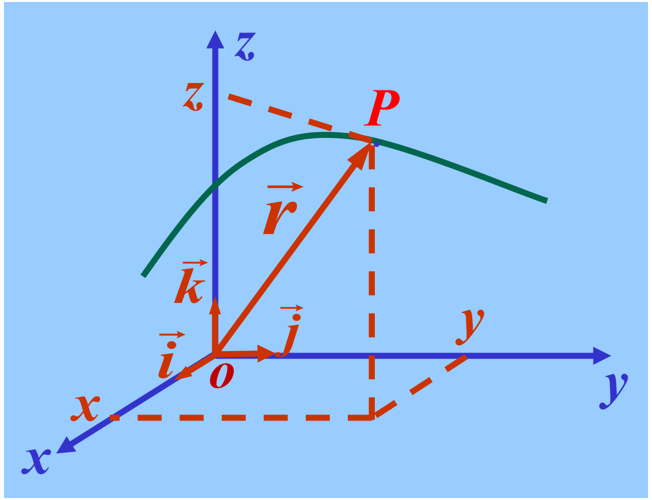
$$\boxed{\text{矢径：} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

单位矢量：沿着 x、y、z 轴方向、长度为 1 的矢量，表示为 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 。

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} \qquad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

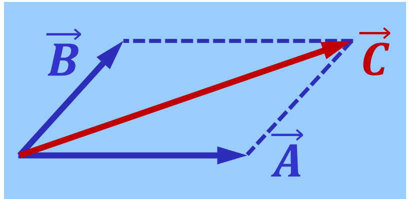


位置矢量 $\vec{r}$ 的性质：

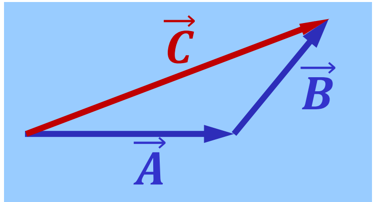
- 矢量性：$\vec{r}$ 有大小，有方向。
- 瞬时性：$\vec{r}$ 是 t 的函数，可表示为 $\vec{r}(t)$ 。
- 相对性：相对不同坐标系质点在 P 点的位矢不同。

矢量的基本运算法则

- 矢量加法: $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$

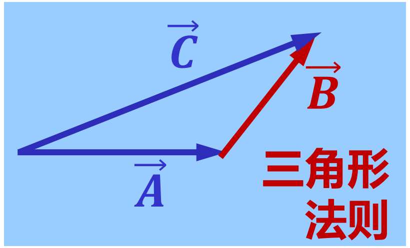


平行四边形法则



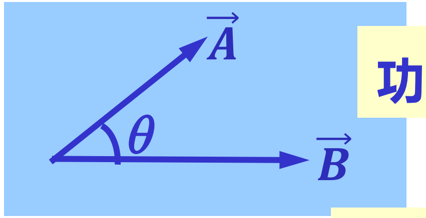
三角形法则

- 矢量减法: $\vec{C}-\vec{A}=\vec{B}$



三角形法则

- 矢量点乘: $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$

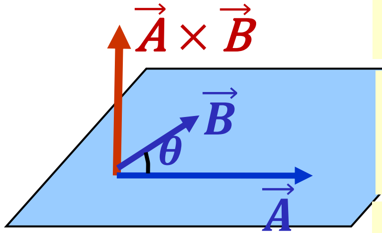


功 $A=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=F\Delta r\cos\theta$

- 矢量叉乘: $|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta$

方向：右手螺旋法则

垂直于 $\vec{A}$、$\vec{B}$构成的平面



力矩 $|\vec{M}|=|\vec{r}\times\vec{F}|=rF\sin\theta$

安培力$|\vec{F}|=|I\vec{l}\times\vec{B}|$
$=IlB\sin\theta=IlB_{\perp}$

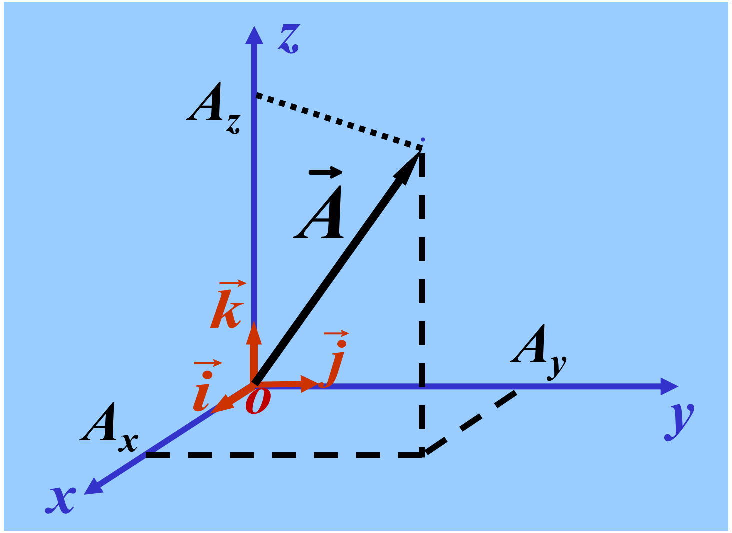
洛伦兹力$|\vec{f}|=|q\vec{v}\times\vec{B}|=qvB_{\perp}$

矢量的合成与分解

在直角坐标系 o-xyz 中：

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$



$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k}$$

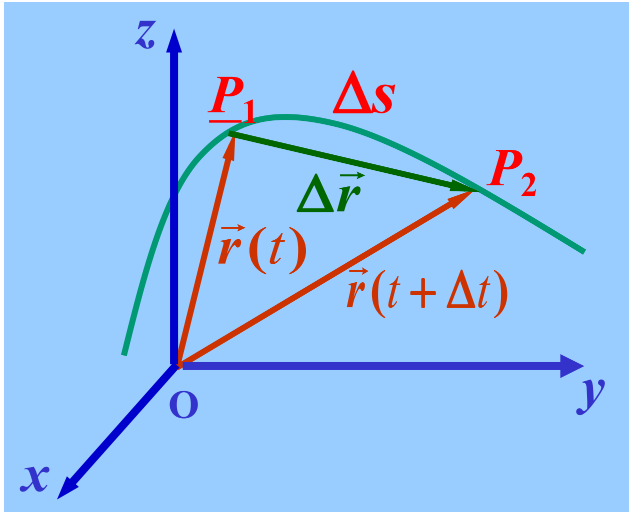
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

2. 位移矢量：位置矢量的增量

t 时刻：　P_1 点，位矢为 $\vec{r}(t)$ ，

$t+\Delta t$ 时刻：P_2 点，位矢为 $\vec{r}(t+\Delta t)$ ，

有向线段 P_1P_2 (位移) 记为 $\Delta\vec{r}$ ：



$$\boxed{\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=\Delta x\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}}$$

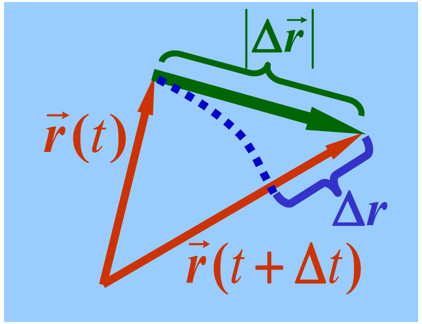
大小：$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$

方 向：$\cos\alpha=\dfrac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|}$　$\cos\beta=\dfrac{\Delta y}{|\Delta\vec{r}|}$　$\cos\gamma=\dfrac{\Delta z}{|\Delta\vec{r}|}$

- $\Delta\vec{r}$ 是矢量。

  $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta r$，　$\Delta r=r(t+\Delta t)-r(t)$

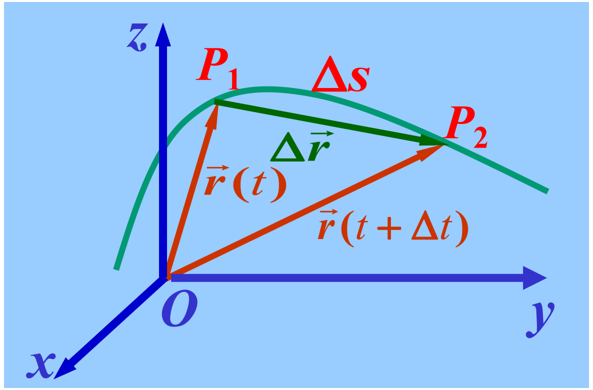
  $|\Delta\vec{r}|\neq\Delta s$，　——路程(标量) Δs



- 只有在 $\Delta t\to 0$ 时，$|\Delta\vec{r}|=\Delta s$

3. 速度矢量

平均速度: $\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$



瞬时速度: $$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$$

速度方向：沿该时刻该位置轨道的切线方向并指向前进的一侧。

速度的大小 (瞬时速率)： $$v = |\vec{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

速度的叠加原理：质点的速度是各分速度的矢量和。

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

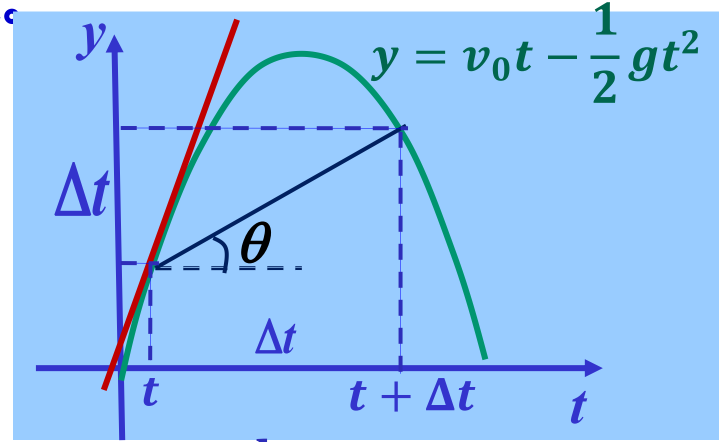
速率 $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ 方向： α, β, γ 的求法同 $\vec{r}$

瞬时速度 $\boxed{\vec{v}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$

➢ **一维情形(竖直上抛)：质点的位置 y 是时间 t 的函数，其对 t 求导可得质点在 t 时刻的瞬时速度。**

平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ 对应两点连线的斜率 $(\tan\theta)$

瞬时速度 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 对应点处切线的斜率



$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_0-gt$$

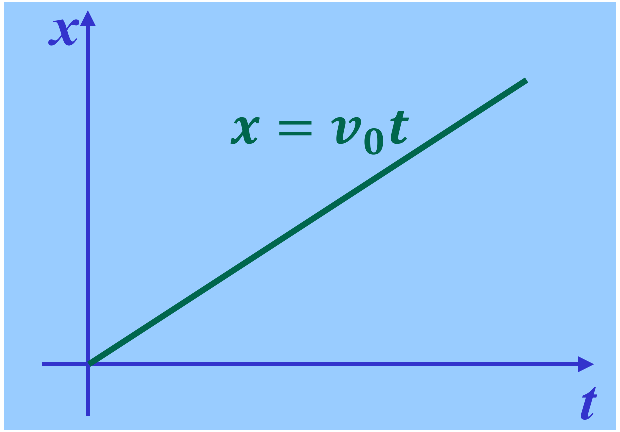
微元法

t 时刻： $y(t)=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$

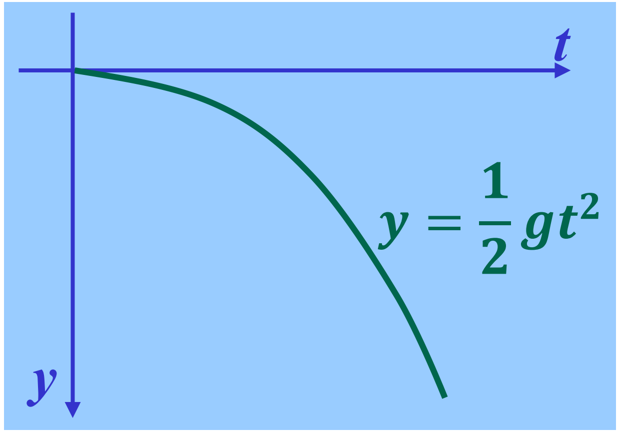
$t+\Delta t$ 时刻： $y(t+\Delta t)=v_0(t+\Delta t)-\dfrac{1}{2}g(t+\Delta t)^2$

$\Delta t\to 0$ $$v(t)=\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=\frac{v_0\Delta t-\frac{1}{2}g(2t\Delta t+(\Delta t)^2)}{\Delta t}=v_0-gt+\frac{1}{2}g\Delta t=v_0-gt$$

➢ 二维情形(平抛运动)：质点的位置 x 和 y 都是时间 t 的函数，x 和 y 分别对 t 求导可得质点在 t 时刻的瞬时速度在 x 和 y 方向分量的大小。



$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0$$



$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = gt$$

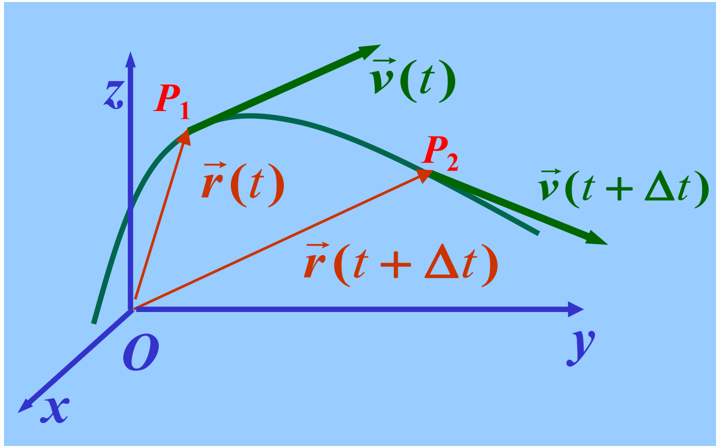
微分问题：求瞬时变化率、结果等于切线的斜率

4. 加速度矢量

➢ 加速度的定义

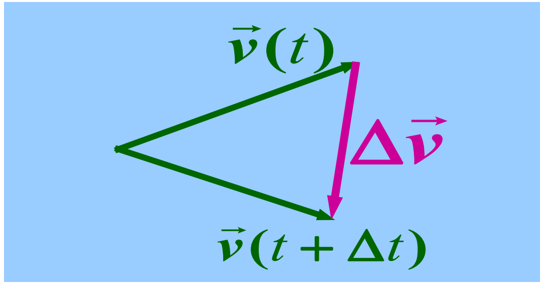
t 时刻： 质点的速度为 $\vec{v}(t)$，

$t+\Delta t$ 时刻：质点的速度为 $\vec{v}(t+\Delta t)$，



速度增量：$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$

平均加速度： $\overline{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$



瞬时加速度：$\boxed{\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$

加速度的方向：$\Delta t\to 0$ 时速度增量 $\Delta\vec{v}$ 的极限方向，

此方向一般不同于速度 $\vec{v}$ 的方向。

➢ 直角坐标系中，加速度表达式

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$ 加速度的合成

加速度的大小： $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

加速度的方向：α, β, γ 的求法同 $\vec{r}$ 。

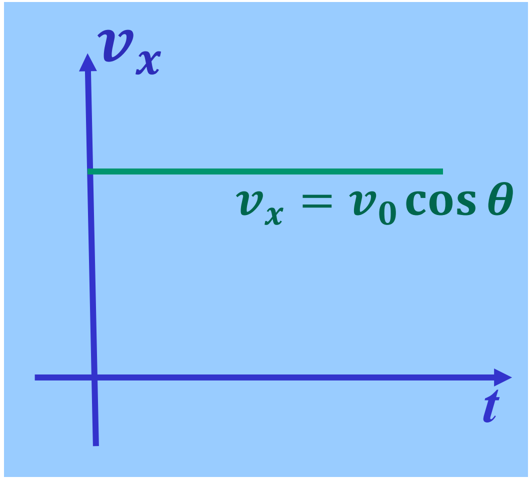
瞬时加速度

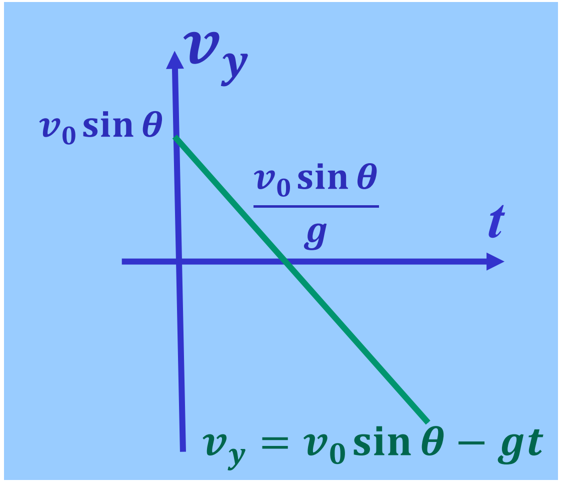
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

某时刻质点在x, y, z 方向上的**瞬时加速度**等于 v_x - t, v_y - t, v_z – t 曲线在对应时刻处**切线的斜率**。

- **二维情形 (斜抛运动)**：抛体的 v_x 和 v_y 都是时间 t 的函数， v_x 和 v_y 分别对 t 求导可得质点在 t 时刻的瞬时加速度在x 和 y 方向分量的大小。

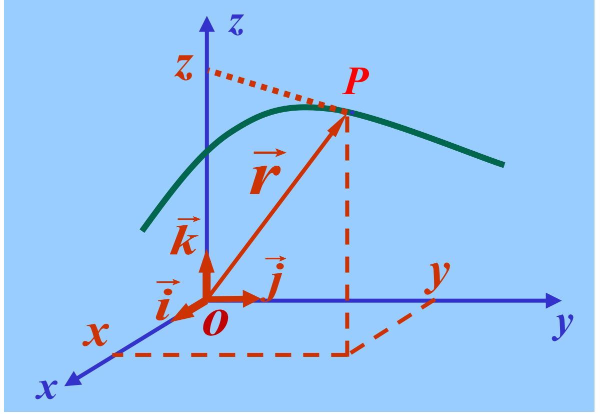
$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0$$





$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-g$$

5．总结：运动学的矢量及微分表示法



位置矢量 $$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位移矢量 $$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

速度矢量 $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

加速度矢量 $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

➢ 微分运算总结：求瞬间变化率问题

速度 $\overline{v}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$　　$v_x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

x-t 曲线某点切线的斜率

加速度 $\overline{a}_x = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$　　$a_x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$

v_x-t 曲线某点切线的斜率

梯度分量 $\overline{F_{\text{保守}x}} = -\dfrac{\Delta E_\mathrm{p}}{\Delta x}$　　$F_{\text{保守}x}(x) = -\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta E_\mathrm{p}}{\Delta x} = -\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}$

E_p-x 曲线某点切线的斜率

两个量间的函数变化关系(曲线)一定，其切线斜率的变化情况就一定，即对该函数的微分可得确定值，这可由微分公式表查得。

常见函数的微分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^n)=nt^{n-1}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^t)=e^t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t)=\cos t\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

微分运算法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)+f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_1(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t}\cdot f_2(t)+f_1(t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[Const.]=0\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[af(t)]=a\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(x)]=0$$

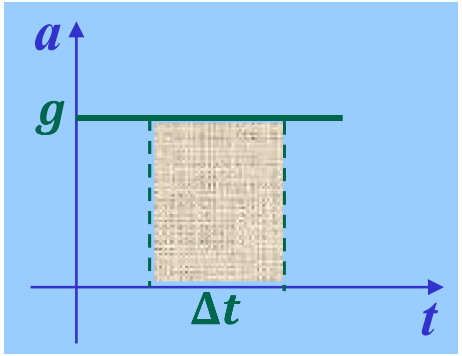
二、几种典型的运动

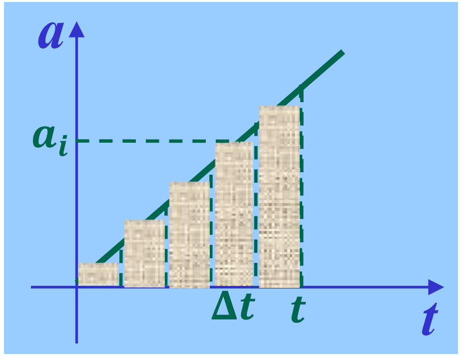
运动学所要求解的两类典型问题：

- **微分法：** 已知 $\vec{r} \xrightarrow{\text{微分}} \vec{v} \xrightarrow{\text{微分}} \vec{a}$
- **积分法：** 已知 $\vec{a} \xrightarrow{\text{积分}} \vec{v} \xrightarrow{\text{积分}} \vec{r}$

➢ 积分运算：已知加速度 a， 求速度增量（直线运动）

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad dv = a\,dt \qquad \Delta v = a\Delta t$$





$\Delta v_i = a_i \Delta t$

= 矩形面积

$0 \to t$

$$\Delta v = \sum_i a_i \Delta t$$

$\Delta v = a\Delta t =$ 矩形面积

$0 \to t$

$$\Delta v = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i a_i \Delta t = \int_0^t a\,dt$$

自由落体 $\quad v_t - 0 = gt$

竖直上抛 $\quad v_t - v_0 = -gt$

某时间段的速度增量等于$a(t)$ 对t的积分，其大小等于相应 a - t 曲线下的面积。

积分运算总结：已知变化率函数求变化的问题；
元量引起的元物理量的 叠加问题。

位置变化:
位移

$$\Delta x = v_x \Delta t \qquad \Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v_x(t)\Delta t = \int_0^t v_x(t)\mathrm{d}t$$

$v(t)$ 曲线下面积

速度增量

$$\Delta v = a\Delta t \qquad \Delta v = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i a_i(t)\Delta t = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t$$

$a(t)$ 曲线下面积

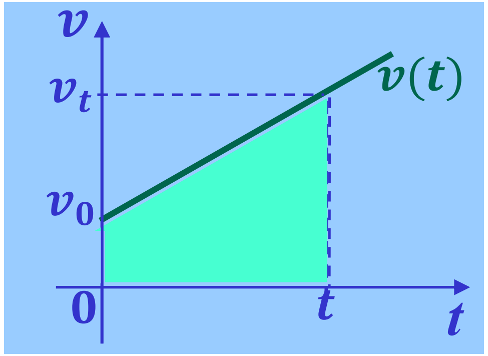
功

$$W = F(x)\Delta x \qquad W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i F(x_i)\Delta x = \int F(x)\mathrm{d}x$$

$F(x)$ 曲线下面积

函数随变量的变化关系(曲线)一定，其下面积就一定，即对该函数的积分可得确定值，这可由积分公式表查得。

匀加速运动：$v(t) = v_0 + at$



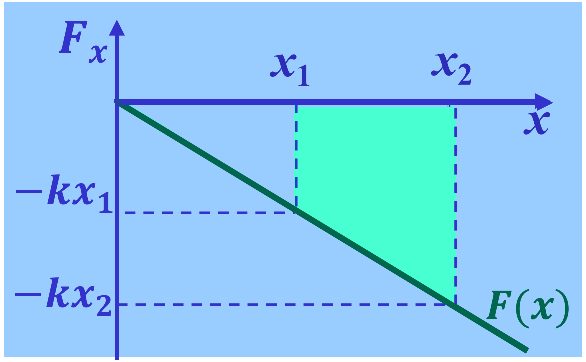
位移：

$$s = \int_0^t v(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(v_0 + v_t)t$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

弹力：$F(x) = -kx$



功：

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\mathrm{d}x$$

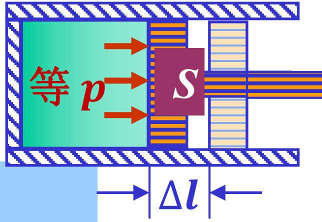
$$= -\frac{1}{2}(kx_1 + kx_2)(x_2 - x_1)$$

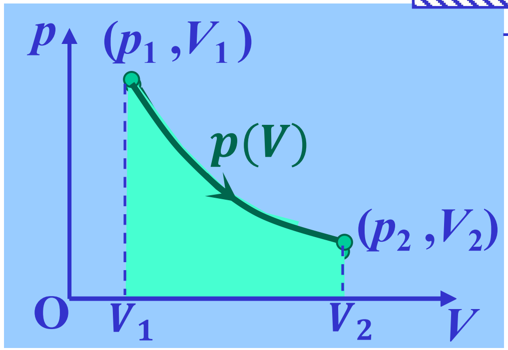
$$= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

弹性势能：$E_\mathrm{p} = \dfrac{1}{2}kx^2$

压力做功：$W = pS \cdot \Delta l$

$= p\Delta V$

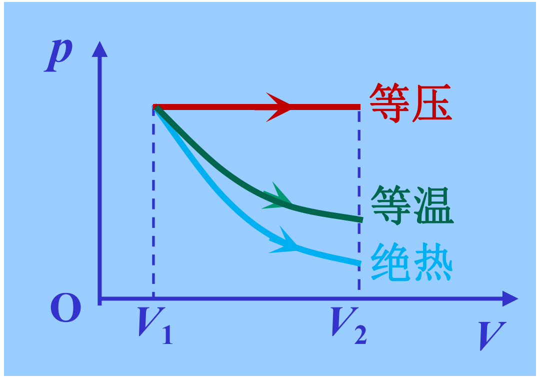




体积功：

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V$$

过程量



常见函数的积分：

$$\int t^n \mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\int e^t \mathrm{d}t = e^t$$

$$\int (\cos t)\mathrm{d}t = \sin t$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x$$

1. 匀加速运动　$\vec{a}$ 为常矢量

$\vec{v}_0$ 与 $\vec{a}$ 的方向不一定相同

- **速度方程**

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\qquad \mathrm{d}\vec{v}=\vec{a}\mathrm{d}t\qquad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_0^t\vec{a}\mathrm{d}t\qquad \boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t}$$

分量方程：(直角坐标系)

$$\begin{cases} v_x=v_{0x}+a_xt \\ v_y=v_{0y}+a_yt \\ v_z=v_{0z}+a_zt \end{cases}$$

- **运动函数(方程)**

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\qquad \mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\mathrm{d}t\qquad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{a}t)\mathrm{d}t\qquad \boxed{\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{v}_0t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

分量方程：(直角坐标系)

$$\begin{cases} x-x_0=v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2 \\ y-y_0=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2 \\ z-z_0=v_{0z}t+\frac{1}{2}a_zt^2 \end{cases}$$

(1) 匀加速直线运动

$\vec{a}$ 为常矢量；$v_0 = 0$ 或 $\vec{v}_0$ 与 $\vec{a}$ 共线。

运动学公式： $v_t = v_0 + at$ $\quad x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $\quad v_t^2 - v_0^2 = 2ax$

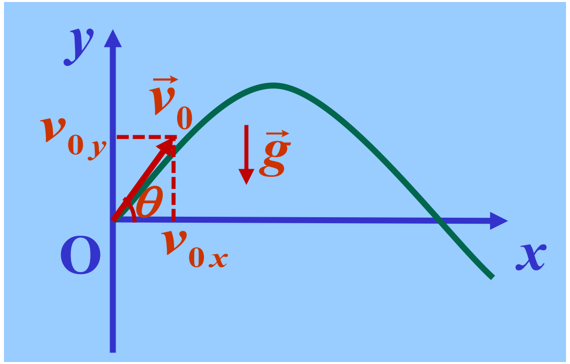
- **自由落体:** 取 y 轴向下，起点为坐标原点。

$$v_t = gt \qquad y = \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_t^2 = 2gy$$

- **竖直上抛:** 取 y 轴向上，上抛点为原点。

$$v_t = v_0 - gt \qquad y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_t^2 - v_0^2 = -2gy$$

(2) 匀加速曲线运动（平抛、斜抛）



斜抛运动:
$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases}$$

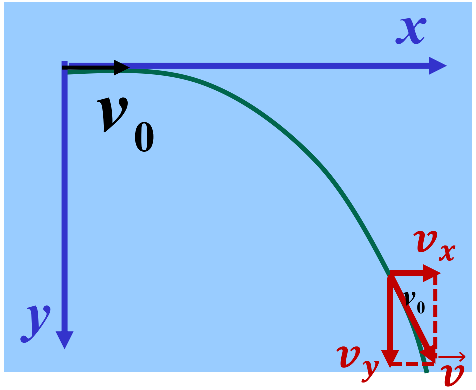
$$\begin{cases} x = v_0 \cos\theta\, t \\ y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

射高：$Y = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$　射程：$X = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

轨道方程：$y = x\tan\theta - \dfrac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$

特例：$\theta = 0$，平抛运动

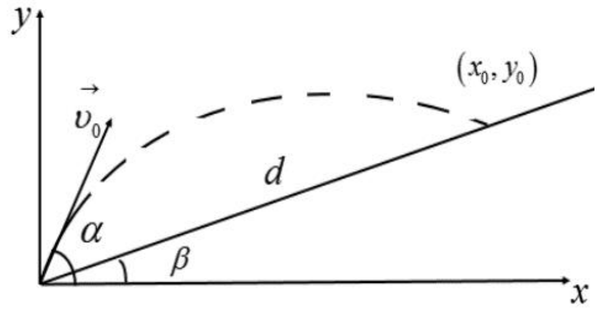
$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$



$\tan\beta = \dfrac{gt}{v_0}$

得 分

7.（16 分）一质点以初速 v_0 自倾角为 β 的斜面底端抛出. $\vec{v}_0$ 与水平夹角为 α（$\beta<\alpha$），求质点在斜面上的最大射程（不计空气阻力）.



解法一： $x_0 = v_0\cos\alpha \cdot t = d\cos\beta$

$$y_0 = v_0\sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = d\sin\beta$$

x 轴：匀速

y 轴：竖直上抛

$$t = \frac{d\cos\beta}{v_0\cos\alpha} \qquad v_0\sin\alpha \cdot \frac{d\cos\beta}{v_0\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{d^2\cos^2\beta}{v_0^2\cos^2\alpha} = d\sin\beta$$

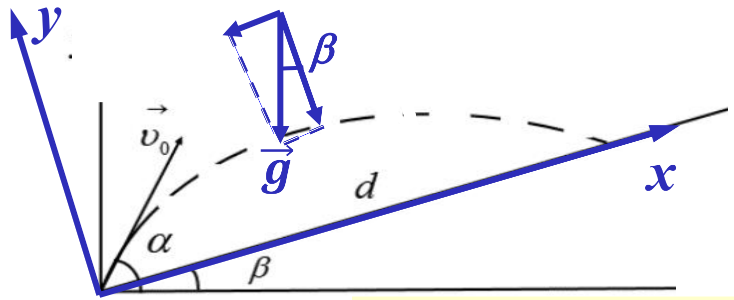
$$d = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}\cdot\left(v_0\sin\alpha\cdot\frac{\cos\beta}{v_0\cos\alpha} - \sin\beta\right) = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\alpha}{\cos^2\beta}\cdot(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta} = \frac{v_0^2}{g}\frac{\sin(2\alpha-\beta)+\sin\beta}{\cos^2\beta}$$

$$2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

解法二： $v_{0x}=v_0\cos(\alpha-\beta)\qquad a_x=-g\sin\beta$

$v_{0y}=v_0\sin(\alpha-\beta)\qquad a_y=-g\cos\beta$



y 轴方向：求飞行时间 T

$$-v_0\sin(\alpha-\beta)=v_0\sin(\alpha-\beta)-g\cos\beta\cdot T$$

$$T=\frac{2v_0\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

x 轴：射程

y 轴：运动时间

x 轴方向：射程 d

$$d=v_0\cos(\alpha-\beta)\cdot T-\frac{1}{2}g\sin\beta\cdot T^2$$

$$=\frac{2v_0^2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin^2(\alpha-\beta)\sin\beta}{g\cos^2\beta}$$

$$=\frac{2v_0^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}=\frac{v_0^2}{g}\frac{\sin(2\alpha-\beta)+\sin\beta}{\cos^2\beta}$$

$$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$$

解法三：斜抛运动可以看作是初速度方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动的叠加。

相对运动：$\vec{r}_{地面系} = \vec{r}'_{自由落体系} + \vec{r}_{自由落体系相对地}$

$$\vec{v}_{地面系} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

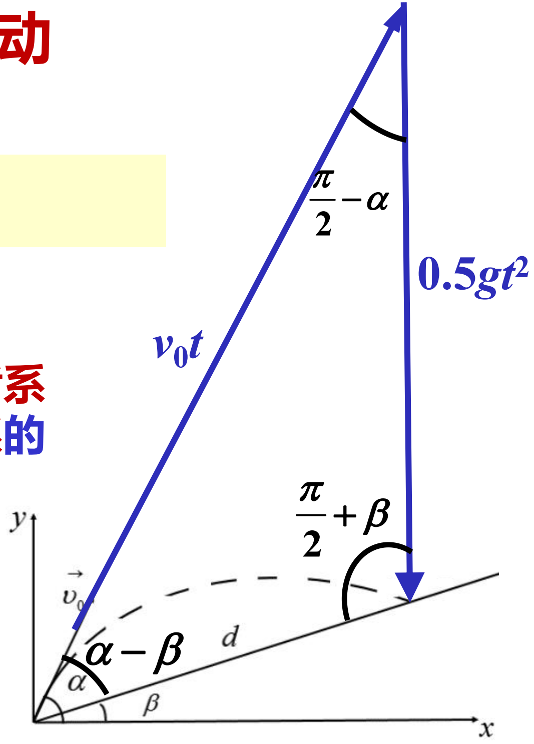
$\vec{v}_0$：自由落体参考系中物体运动的恒定速度 $\vec{v}_0$

$\vec{g}t$：自由落体参考系相对于地面系的速度

$$\frac{v_0 t}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)} = \frac{\frac{1}{2}gt^2}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{d}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$t = \frac{2v_0\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

$$d = \frac{2v_0^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta} = \frac{v_0^2}{g}\frac{\sin(2\alpha-\beta)+\sin\beta}{\cos^2\beta}$$

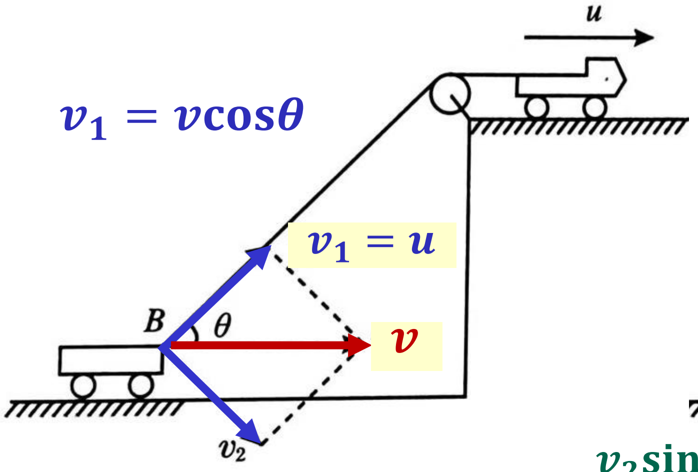


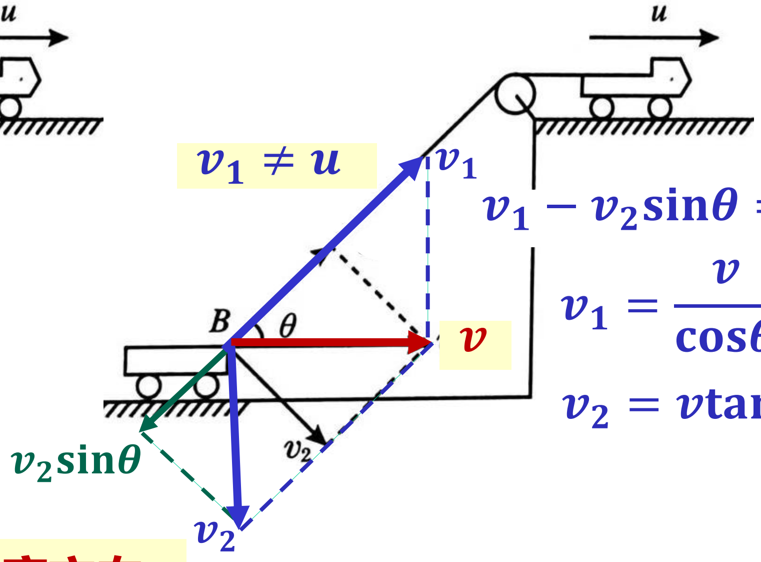
d 取最大的条件为 $2\alpha-\beta = \frac{\pi}{2}$

运动的分解：

- 分解方向(坐标轴)的选取应该具有物理意义；
- 分解时可考虑相对运动的速度变换的思想。

例：如图，高台上拖车以速度 u 运动，并通过缆绳牵动平地上的小车，使之沿地面向右运动。求当绳与地面成 θ 角时，小车的速度。

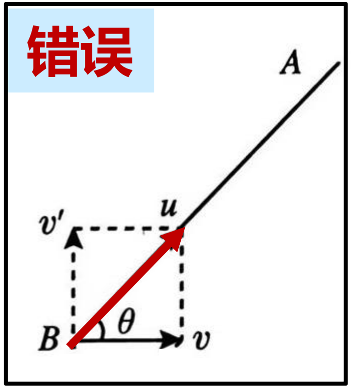




$$v_1 - v_2\sin\theta = u$$

$$v_1 = \frac{v}{\cos\theta}$$

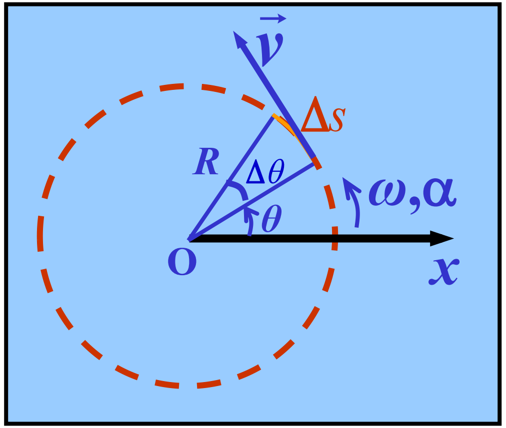
$$v_2 = v\tan\theta$$



- 判断实际运动方向为合速度方向
- 进行速度分解，分解方向原则上任意，但分运动或合运动应该与已知条件相联系；
- 通常分解到相互垂直方向上，此时分运动彼此独立，速度分量代表该方向的运动速度；
- 如果分解方向没有彼此垂直，则速度分量不代表相应方向上的运动速度；

2. 变加速度曲线运动 圆周运动

➢ 圆周运动的速度



线速度：质点作圆周运动的速率 v

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

角速度：如果质点在 Δt 时间内所转过的角度为 $\Delta\theta$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

单位为弧/秒

线速度和角速度之间的关系：$v = R\omega$

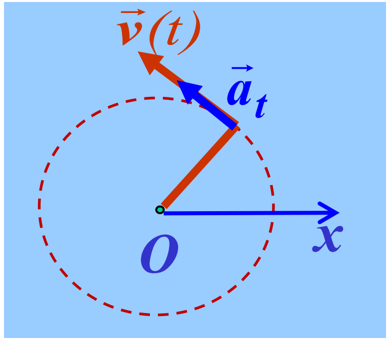
➢ 圆周运动的加速度

切向加速度 $\vec{a}_\mathrm{t}$　　质点速率变化的快慢

$$a_\mathrm{t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha \qquad \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

角加速度

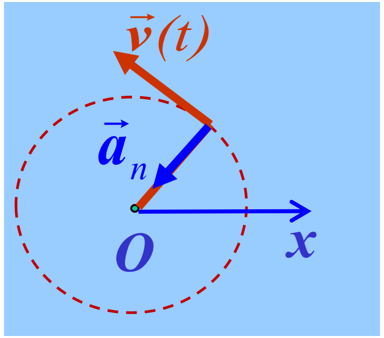
方向沿着切线方向



法向加速度 $\vec{a}_\mathrm{n}$　　质点速度方向的变化

$$a_\mathrm{n}=\frac{v^2}{R}=R\omega^2$$

方向指向圆心



圆周运动的加速度　$\vec{a}=\vec{a}_\mathrm{t}+\vec{a}_\mathrm{n}$

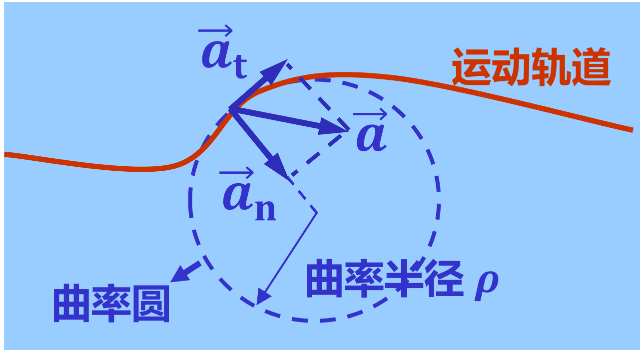
3　任意曲线运动（不同位置处的曲率中心及曲率半径不同）

$$\vec{a} = \vec{a}_\mathrm{t} + \vec{a}_\mathrm{n}$$

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\rho}$$ 方向指向曲率中心

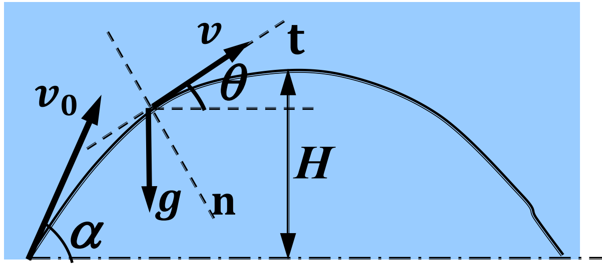
$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$ 方向沿切线方向

自然坐标系



- $\vec{a}_n \neq 0,\ \vec{a}_t \neq 0,$　变速率曲线运动：$\vec{v}$ 方向改变，大小改变
- $\vec{a}_n \neq 0,\ \vec{a}_t = 0,$　匀速率曲线运动：$\vec{v}$ 方向改变，大小不变。
- $\vec{a}_n = \mathrm{C},\ \vec{a}_t = 0,$　**匀速圆周运动。**
- $\vec{a}_n = 0,\ \vec{a}_t \neq 0,$　变速率**直线运动**：$\vec{v}$ 方向不变，大小改变。
- $\vec{a}_n = 0,\ \vec{a}_t = 0,$　匀速率**直线运动**：$\vec{v}$ 方向不变，大小不变。

例：以速度v_0，仰角α 抛出石块沿一抛物线轨道运动。如果一只小鸟以恒定的速度 v_0 沿同一轨道飞行。问小鸟飞到最大高度一半时具有多大的加速度。



解：石块的射高为 $H=\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

石块运动到 $H/2$ 时的 x、y方向 速度分量分别为

$$v_x=v_0\cos\alpha \qquad v_y^2=(v_0\sin\alpha)^2-2g\cdot\frac{H}{2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2}$$

$$v^2=v_x^2+v_y^2=v_0^2\left(\frac{\sin^2\alpha}{2}+\cos^2\alpha\right)$$

$$\tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\tan\alpha$$

石块运动到 $H/2$ 时的法向加速度为 $a_\text{n}=g\cos\theta=\dfrac{v^2}{\rho}$

抛物线在此处的曲率半径:

$$\rho=\frac{v^2}{g\cos\theta}=\frac{v_0^2}{g\cos\theta}\left(\frac{\sin^2\alpha}{2}+\cos^2\alpha\right)=\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{\sin^2\alpha}{2}+\cos^2\alpha\right)\sqrt{1+\tan^2\theta}$$

$$=\frac{v_0^2\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{2}+\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}{g\cos\alpha}$$

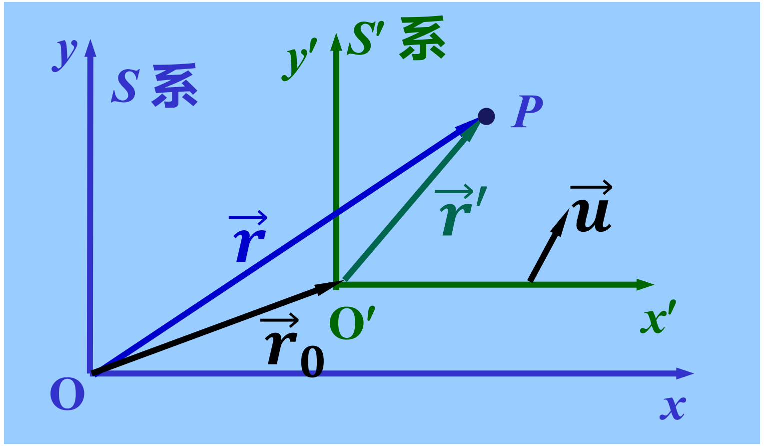
小鸟在此处的加速度分量:

切向加速度 $a_\text{t}=0$

法向加速度 $a_n=\dfrac{v_0^2}{\rho}=\dfrac{g\cos\alpha}{\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{2}+\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}$

三、相对运动　在不同惯性参照系，对同一质点的运动进行描述。

设 $t=0$ 时，两坐标系原点重合，S' 系相对 S 系平动速度为 $\vec{u}$



伽利略变换　$\vec{r}=\vec{r}'+\vec{r}_0$

x 方向的一维运动：
$$x=x'+ut$$
$$y=y'$$
$$z=z'$$

伽利略速度变换　$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{u}$

x 方向的一维运动：
$$v_x=v'_x+u$$
$$v_y=v'_y$$
$$v_z=v'_z$$

牛顿的相对性原理：在所有惯性系中牛顿运动定律具有相同的形式。

速度 $\vec{u}$ 恒定不变　$\vec{a}=\vec{a}'$　在不同惯性参照系，加速度相同。

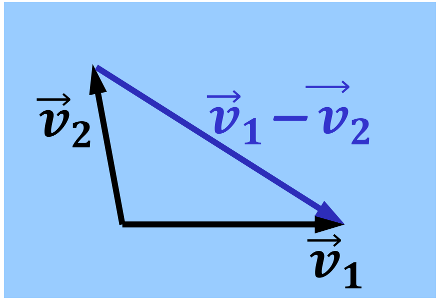
1. 不同参考系的选取问题

- 不同惯性系(或坐标系)的选取: 方便问题解决
- 非惯性系：引入惯性力
- 质心参考系 (特殊非惯性系)：随质心平动 + 绕质心转动

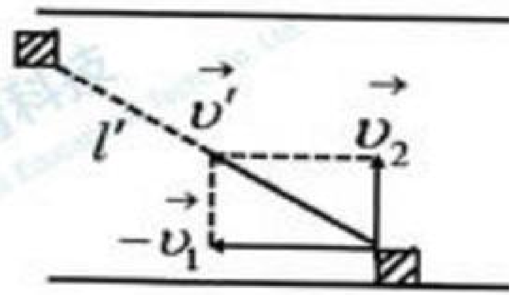
2. 相对速度问题

物体 1 和物体 2 在某参考系中的运动速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ ，则

- 物体 1 相对于物体 2 的速度 为 $\vec{v}_1-\vec{v}_2$
- 物体 2 相对于物体 1 的速度为 $\vec{v}_2-\vec{v}_1$



5. 水平传送带以稳定的速度$\vec{v}_1$运行，质量为m的小物块以水平速度$\vec{v}_2$进入传送带，$\vec{v}_2$与$\vec{v}_1$方向垂直，物块与传送带间的滑动摩擦因数为μ，当物块在传送带上静止时，物块沿传送带运行方向走过的距离是________________，沿垂直于传送带方向走过的距离是________________.



传送带参考系下讨论：物体在与初始速度方向相反的摩擦力的作用下作匀减速直线运动直至静止。

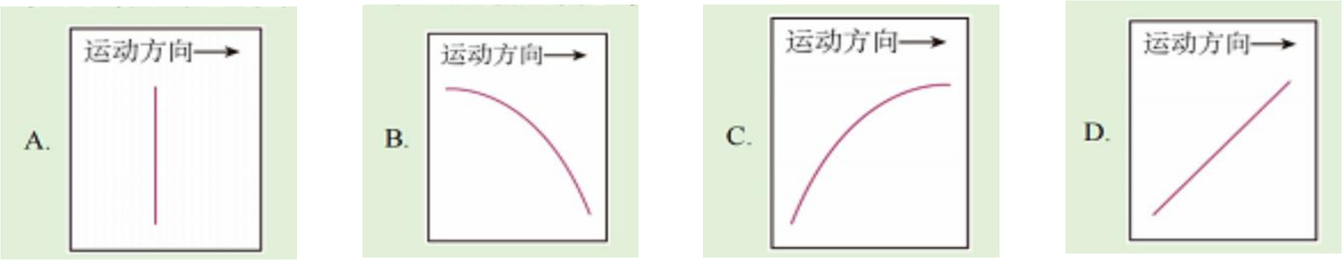
初始速率： $v' = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$　　**加速度：** $a = -\mu g$

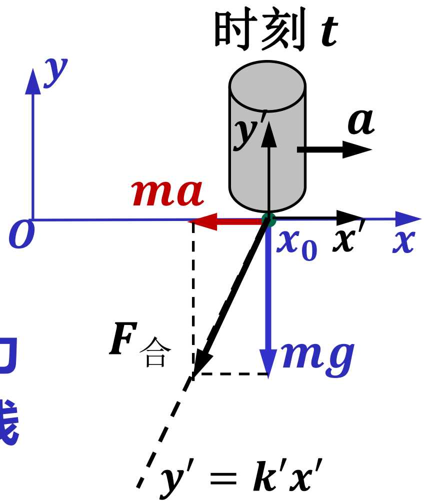
运动路程： $l' = \dfrac{v'^2}{2\mu g} = \dfrac{v_1^2+v_2^2}{2\mu g}$ ➡ $l'_{\parallel} = l' \cdot \dfrac{v_1}{v'}$，$l'_{\perp} = l' \cdot \dfrac{v_2}{v'}$

地面参考系：

水平位移： $x = v_1 \cdot \dfrac{v'}{\mu g} - l'_{//}$　　**垂直位移：** $y = l'_{\perp}$

例：达芬奇的手稿中描述了这样一个实验：一个罐子在空中沿水平直线向右做匀加速运动，沿途连续漏出沙子。若不计空气阻力，则下列图中能反映空中沙子排列的几何图形是？





罐子参考系：非惯性系，引入惯性力$-ma$

沙子除受重力mg作用，还受恒定惯性力ma作用，合力$F_{合}$恒定，由于沙子初速度为 0，因此沙子做匀加速直线运动，先后下落的沙子排列在一条直线上。

地面参考系：对 t 时刻空间中任意位置的沙子有 $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0$

$$x = x' + x_0$$

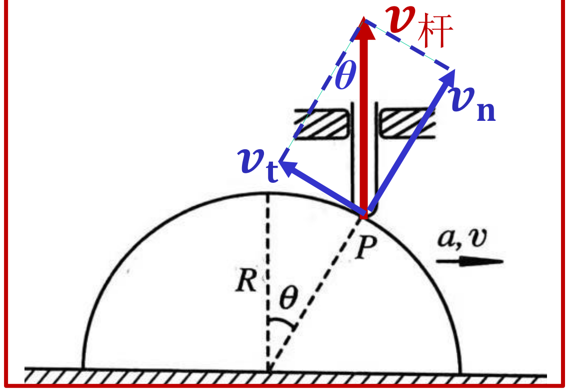
$$y = y'$$

$$x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

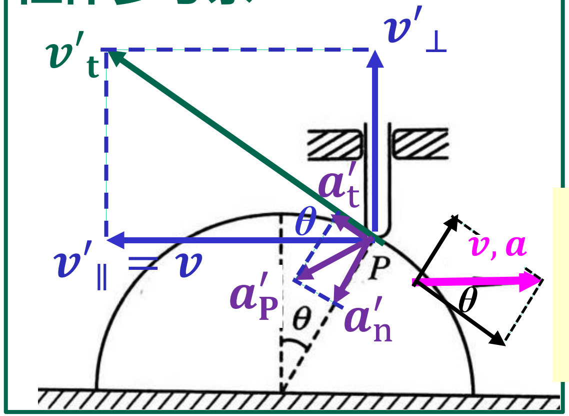
沙子排列形状方程: $y = k'(x - x_0)$ **为同斜率直线**

例：如图，一个半径为 R 的半圆柱体向右做加速度为 a 的匀加速运动。在半圆柱体上放置一根竖直杆，此杆只能沿竖直方向运动，当半圆柱体的速度为 v 时，杆与半圆柱体的接触点 P 和柱心的连线与竖直方向的夹角为 θ，求此时竖直杆运动的速率和加速度。

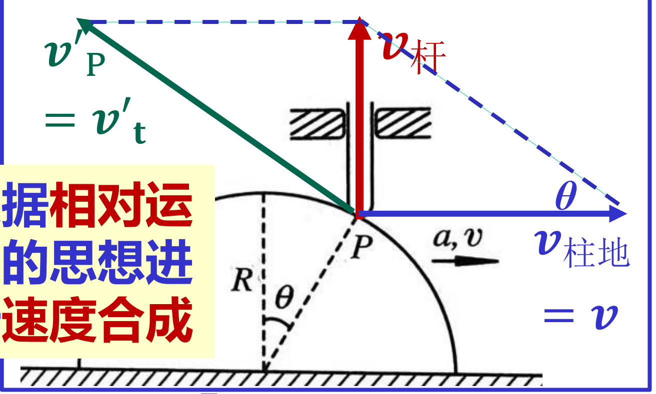
地面参考系：



柱体参考系：



相对运动: $\vec{v}_杆 = \vec{v}'_P + \vec{v}_{柱地}$



根据相对运动的思想进行速度合成

$$v_杆 = \frac{v_t}{\sin\theta} = \frac{v_n}{\cos\theta}$$

$$v'_t = \frac{v'_\parallel}{\cos\theta} = \frac{v}{\cos\theta}$$

$$v_杆 = v\tan\theta$$

运动分量利用相对运动变换关系与已知条件相关联

相对运动：

$$v_t = v'_t - v\cos\theta = \frac{v}{\cos\theta} - v\cos\theta$$

$$v_n = v'_n + v\sin\theta = 0 + v\sin\theta$$

$$a_杆 = -\frac{v^2}{R\cos^3\theta} + a\tan\theta$$

$$a_杆 = \frac{a_t}{\sin\theta} = \frac{a_n}{\cos\theta}$$

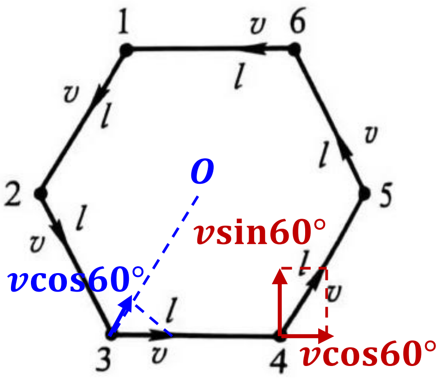
$$a_n = a'_n + a\sin\theta = -\frac{v_t'^2}{R} + a\sin\theta = \frac{v^2}{R\cos^2\theta} + a\sin\theta$$

13. 6 个小朋友在操场上玩追逐游戏.开始时,6 个小朋友两两间距离相等,构成一正六边形.然后每个小朋友均以不变的速率 v 追赶前面的小朋友(即小朋友 1 追 2,2 追 3,3 追 4,4 追 5,5 追 6,6 追 1),在此过程中,每个小朋友的运动方向总是指向其前方的小朋友.已知某一时刻 $t_0=0$,相邻两个小朋友的距离为 l,如图所示.试问:

(1) 从 t_0 时刻开始,又经过多长时间后面的小朋友可追到前面的小朋友?

(2) 从 t_0 时刻开始,直至追上前面的小朋友,每个小朋友又跑了多少路程?

(3) 在 t_0 时刻,每个小朋友的加速度大小是多少?



【 38预-13 】 * *

相对运动+运动的合成和分解:相邻小朋友间相对速度可分解为连线方向分量 (用于缩短距离) 和垂直于连线方向的分量 (导致追击速度方向的改变)。

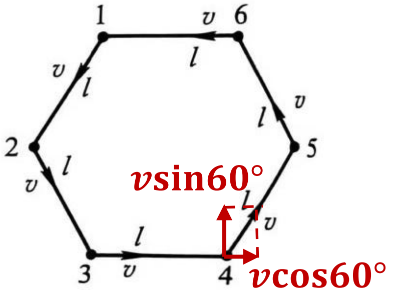
解:(1)方法1 (相对运动): $\vec{v}_{34}$ 在 34 连线方向的分量:$v_{34\parallel}=v-v\cos60^\circ=\dfrac{v}{2}$

3 相对于 4 的速度　　追上时间:$t=\dfrac{l}{v_{34\parallel}}=\dfrac{2l}{v}$

方法2(对称性):追上时即到达中心点O,惯性系中小朋友在任意时刻指向中心O点方向的速度分量为 $v\cos60^\circ$,所用时间为: $t=\dfrac{l}{v\cos60^\circ}=\dfrac{2l}{v}$

(2) 从 t_0 时刻开始，直至追上前面的小朋友，每个小朋友又跑了多少路程？

(3) 在 t_0 时刻，每个小朋友的加速度大小是多少？

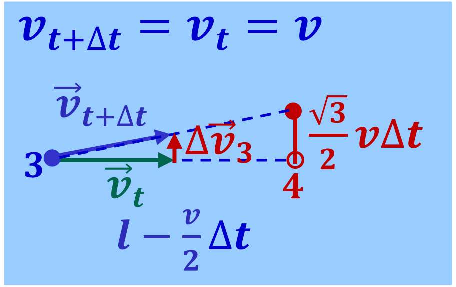


(2) **惯性系中，每个小朋友的速率 v 保持不变，**

追上前面小朋友所跑的路程为： $s = vt = v\cdot\frac{2l}{v} = 2l$

(3) **由于每个小朋友的速率 v 保持不变，其 切向加速度 $a_t = 0$**

由于每个小朋友的速度方向不断改变， 法向加速度 $a_n \neq 0$



$\vec{v}_{43}$ **在垂直于 34 连线方向的分量：** $v_{43\perp} = v\sin60° - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}v$

微元法	
t 时刻：	3 的运动速度 $\vec{v}_t$ 指向 4；
$t+\Delta t$ 时刻：	3、4 相距 $l-\frac{v}{2}\Delta t$，4 沿垂直于连线方向运动了距离 $v_{43\perp}\Delta t = \frac{\sqrt{3}}{2}v\Delta t$

3 的速度始终朝向 4， $\Delta\vec{v}_3 = \vec{v}_{t+\Delta t} - \vec{v}_t$ $\quad \Delta v_3 = v\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}v\,\Delta t}{l-\frac{v}{2}\Delta t} = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l}\Delta t\left(1+\frac{v}{2l}\Delta t\right) \approx \frac{\sqrt{3}v^2}{2l}\Delta t$

3 的法向加速度为： $a_n = \frac{\Delta v_3}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l}$ $\quad$ **所求加速度为：** $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l}$

自然坐标系

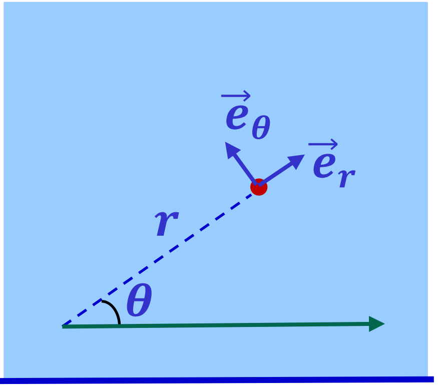
极坐标系　质点位置 (r,θ) 矢量：$\vec{r}=r\vec{e}_r$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta=\omega\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r$$

速度矢量：$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$　$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta$

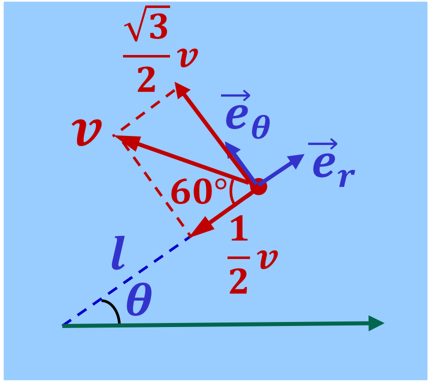
加速度矢量：$\vec{a}=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{e}_r+\left[r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right]\vec{e}_\theta$



(3) 由题意有：$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}v$　$v_\theta=r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{3}}{2}v$　$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{3}v}{2r}$

v 恒定　$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)=0$　$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sqrt{3}v}{2r}\right)$

$$=-\frac{\sqrt{3}v}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\sqrt{3}v^2}{4r^2}$$



$$a_r=0-r\left(\frac{\sqrt{3}v}{2r}\right)^2=-\frac{3v^2}{4r}$$

$$a_\theta=r\frac{\sqrt{3}v^2}{4r^2}+2r\left(-\frac{1}{2}v\right)\frac{\sqrt{3}v}{2r}=-\frac{\sqrt{3}v^2}{4r}$$

合加速度：$a=\sqrt{a_\mathrm{t}^2+a_\mathrm{n}^2}=\frac{\sqrt{3}v^2}{2l}$

第二部分　质点动力学

牛顿第一定律（惯性定律）

任何物体如果没有力作用在它上面，都将保持静止的或作匀速直线运动的状态(保持原有运动状态)。

牛顿第二定律

运动的变化与所加合力成正比，方向沿此合力方向。

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

牛顿第三定律

作用力与反作用力大小相等、方向相反，作用在不同物体上。

一、静力学问题

静力学平衡条件

- 物体在任意方向上所受的合外力一定为 0 (对于平面力系，两个互相垂直的方向可列两个独立的力平衡方程)。

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

- 物体所受所有外力相对任意一点的力矩一定为 0 (可列一个独立的力矩平衡方程)。

$$\sum_i \vec{M}_i = 0$$

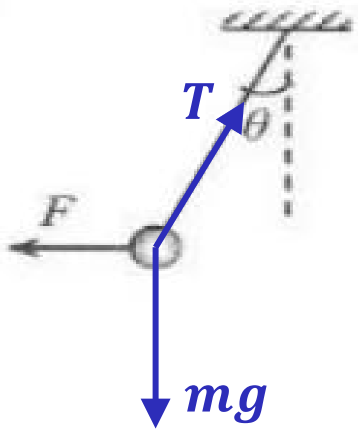
【31预- 5】 *

答案：B

5. 如图 2 所示，水平力 F 将小球的悬线拉偏离竖直方向 θ 角。关于力 F、小球质量 m 及偏角 θ 之间的关系，下列关系中正确的是

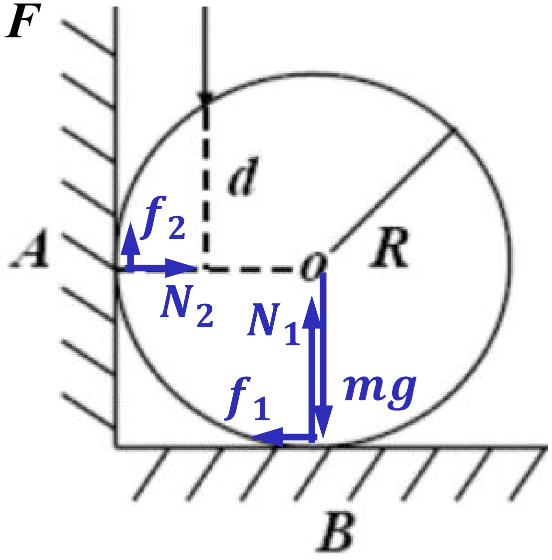
A. $F=mg\sin\theta$　　B. $F=mg\tan\theta$

C. $F=\dfrac{mg}{\cos\theta}$　　D. $F=\dfrac{mg}{\tan\theta}$



【28北京力学决- 5】**

5. 如图 2 所示，半径为 R、质量为 m 的均匀圆柱体，A、B 接触处的静摩擦系数都是 1/3，地面水平、墙壁竖直，在圆柱体上部加一竖直向下的力 $F=2mg$，当力的作用线到中心 O 的距离 d 增大到某一值时，圆柱体开始逆时针转动，则 B 处对圆柱体的支持力大小为 ____2.7mg____，d=____0.6R____.



临界平衡：A、B 两点处的静摩擦力同时达到最大。

$$f_1=\frac{1}{3}N_1 \qquad f_2=\frac{1}{3}N_2$$

竖直方向力平衡： $F+mg=N_1+f_2$

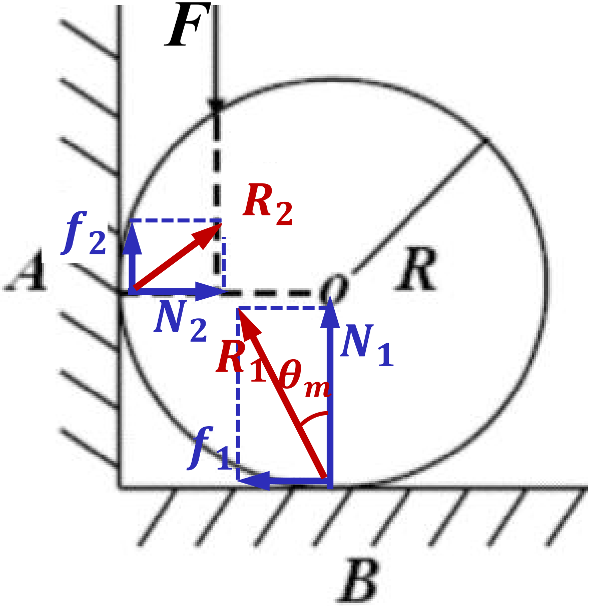
水平方向力平衡： $N_2=f_1$

对中轴 O 力矩平衡： $Fd=(f_1+f_2)\cdot R$

三个未知量：N_1、N_2 和 d，列三个方程可解。

临界平衡问题：若刚体上有两处同时受到摩擦力，且两处会同步开始滑动时，**两点处的静摩擦力将同时达到最大。**

$$f_1 = \mu_{s1}N_1 \qquad f_2 = \mu_{s2}N_2$$



共点力系可简化为一个合力：在存在摩擦力和正压力 (**约束反力**) 的情形，其合力 (**全反力** R) 与法线之间的夹角为 θ，则 $\tan\theta = \dfrac{f}{N}$

通常情况下，在**到达临界平衡前，摩擦力和正压力间的关系不能确定**，因此 N 和 f 都是未知量，物体的受力情况将难于求解。

临界平衡：当摩擦力变为最大静摩擦力时，其合力 (与法线之间的夹角最大，为 θ_m)，则

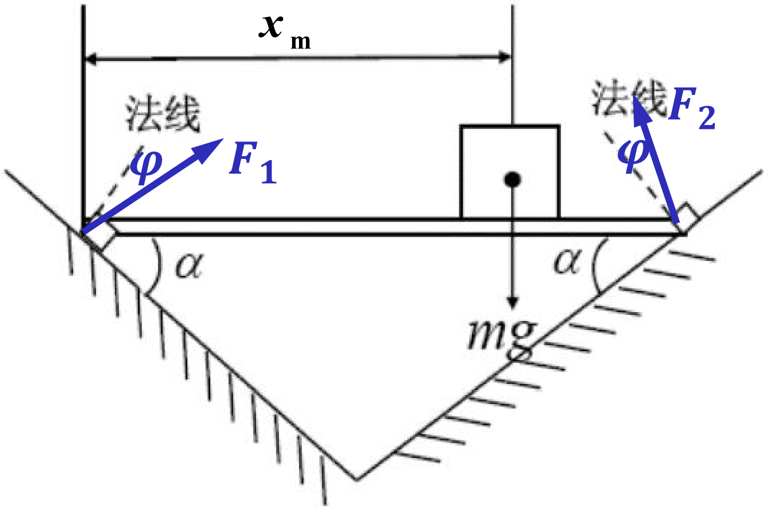
$$\tan\theta_m = \frac{f_s}{N} = \mu_s$$

θ_m 被称为**摩擦角**，物体平衡不滑的条件为：

$$\theta \le \theta_m$$

【28北京力学决-10】**

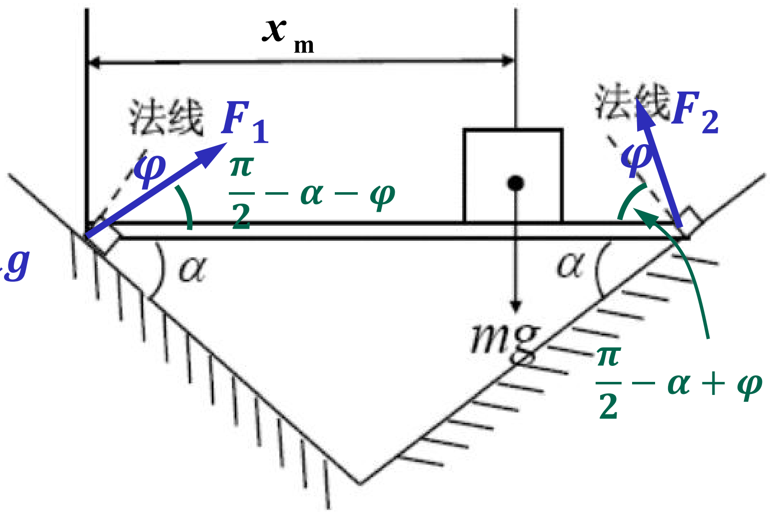
10. （25分）在倾角为α的两个斜面上，放一长为l的水平版，板上方有一质量为m的重物，设板与两个斜面间存在摩擦，且支持力与最大静摩擦力的合力与法线夹角为φ，板的质量不计，求平衡时重物在板上的位置x（如图7所示）



思路：求解临界平衡下重物的位置x_m，板两端同时达到最大摩擦力，所给φ为摩擦角，即摩擦力和支持力的合力（设为F_1和F_1）与法线的夹角，$\tan\varphi$为静摩擦系数。

未知量：F_1、F_2和x_m，列三个方程可解。

解法一：考虑力平衡和力矩平衡



水平/竖直力平衡：

$$F_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi\right)=F_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\varphi\right)$$

$$F_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi\right)+F_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\varphi\right)=mg$$

对左端力矩平衡：

$$F_2\cdot l\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\varphi\right)=mgx_m$$

$$F_1=F_2\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}\qquad F_2=\frac{mgx_m}{l\cos(\alpha-\varphi)}$$

$$\frac{\sin2\alpha-\sin2\varphi}{\sin2\alpha+\sin2\varphi}\cdot\frac{x_m}{l}+\frac{x_m}{l}=1\qquad x_m=\frac{l}{2}\left(1+\frac{\sin2\varphi}{\sin2\alpha}\right)$$

达到最大摩擦力前都会处于平衡状态，此时摩擦力和支持力的合力与法线的夹角一定小于φ，考虑对称性，平衡位置为

$$\frac{l}{2}\left(1-\frac{\sin2\varphi}{\sin2\alpha}\right)\le x\le\frac{l}{2}\left(1+\frac{\sin2\varphi}{\sin2\alpha}\right)$$

解法二：三力平衡共点定理

平面上不平行的三力作用于刚体上，刚体平衡时，此三力必共点。

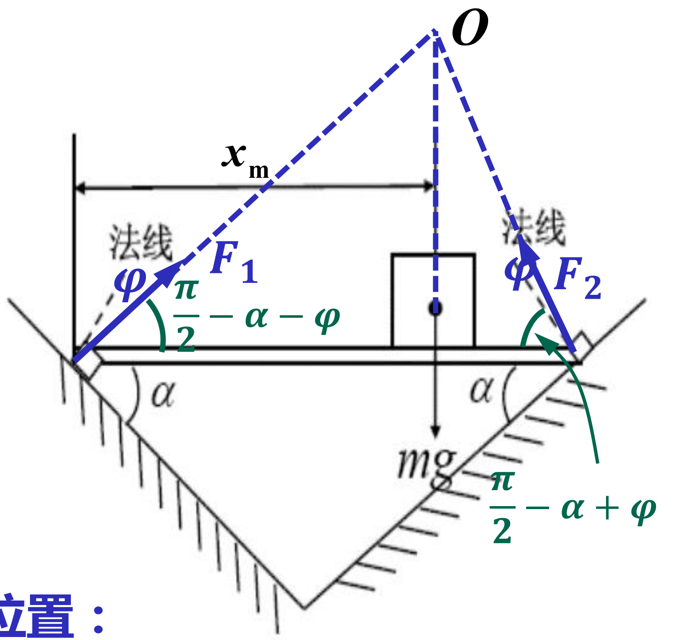
设三力延长线交汇于图中 O 点。

$$x_m\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi\right)=(l-x_m)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\varphi\right)$$

$$x_m=\frac{l\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\varphi\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\varphi\right)+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\varphi\right)}$$

$$=\frac{l}{1+\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)\cos(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)\sin(\alpha+\varphi)}}$$

$$=\frac{\sin2\alpha+\sin2\varphi}{\sin2\alpha}\frac{l}{2}=\frac{l}{2}\left(1+\frac{\sin2\varphi}{\sin2\alpha}\right)$$



平衡位置：

$$\frac{l}{2}\left(1-\frac{\sin2\varphi}{\sin2\alpha}\right)\le x\le\frac{l}{2}\left(1+\frac{\sin2\varphi}{\sin2\alpha}\right)$$

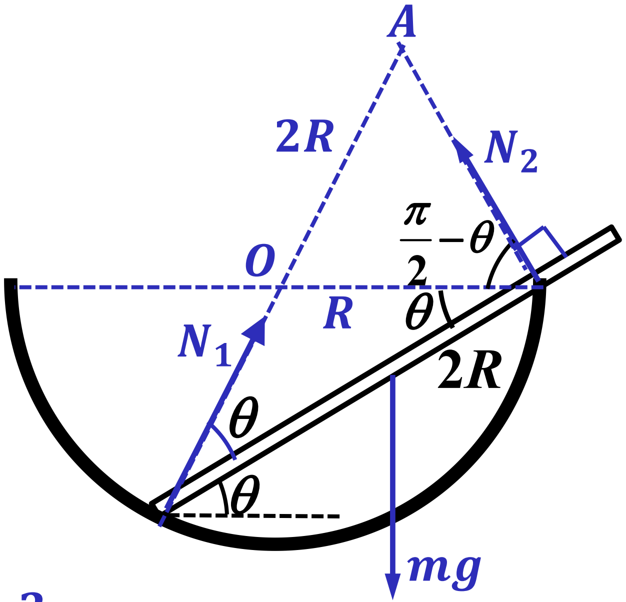
例：长度为 $2R$ 的光滑匀质棒静止于半径为 R 的半球面光滑碗内，求平衡时棒与水平面的夹角 θ 应满足的关系。

解法一(力平衡、力矩平衡)：支持力垂直于接触面

$$\boxed{\begin{aligned} N_1\cos 2\theta &= N_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ N_1\sin 2\theta + N_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= mg \\ N_2\cdot 2R\cos\theta &= mg\cdot R\cos\theta \end{aligned}}$$

$$N_1 = \frac{mg}{2}\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}$$

$$N_2 = \frac{mg}{2}$$



$$\frac{mg}{2}\frac{\sin\theta}{\cos 2\theta}\sin 2\theta + \frac{mg}{2}\cos\theta = mg$$

$$\frac{2\sin^2\theta\cos\theta + 2\cos^3\theta - \cos\theta}{2\cos^2\theta - 1} = 2$$

$$\frac{\cos\theta}{2\cos^2\theta - 1} = 2$$

$$4\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$$

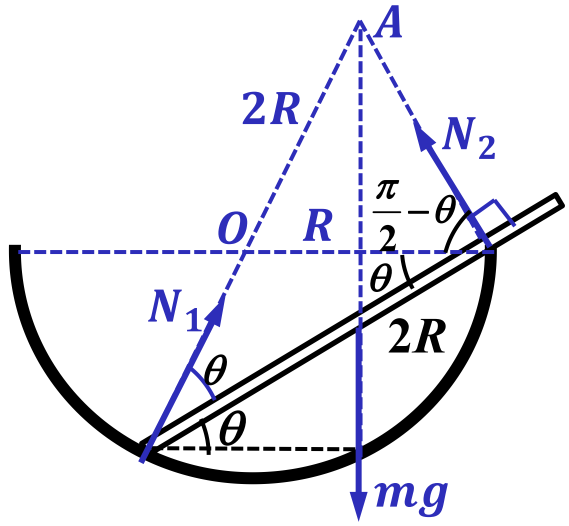
解法二(三力平衡共点定理)：N_1、N_2和 mg 三力延长线将交汇于图中 A 点。

$$2R\cos 2\theta = R\cos\theta$$

$$2\left(2\cos^2\theta - 1\right) = \cos\theta$$

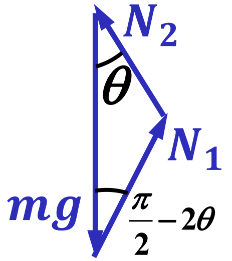
$$4\cos^2\theta - \cos\theta - 2 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{1+32}}{8} = 0.843$$



解法三 (力矢量叠加)：N_1、N_2 的大小可通过矢量叠加的三角形法则求得，将三个力首尾相接构成一个三角形，由正弦定理

$$\frac{N_1}{\sin\theta} = \frac{N_2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)} = \frac{mg}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \longrightarrow N_1、N_2$$



二、动力学方程——瞬时性问题

- 连接体问题——隔离物体法
- 变力问题——微积分
- 连续质量变化问题——微元法

1. 牛顿第二定律

质点动力学的基本方程：

$$\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$$

瞬时性
矢量性

$v \ll c$ 时质量不变：$\vec{F}=m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$

分量形式：

直角坐标系

$$\sum_i F_{ix}=ma_x=m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i F_{iy}=ma_y=m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i F_{iz}=ma_z=m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

自然坐标系

$$\sum_i F_{it}=ma_{\mathrm{t}}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i F_{in}=ma_{\mathrm{n}}=m\frac{v^2}{R}$$

【26北京力学预-6】 * *

答案：B

6、三角形滑块的钉子 O 上悬挂一个单摆，如图 2 所示。用 O 点正下方竖直线到单摆的摆线所张的角 $\angle O_1OP$ 来确定摆球的位置，并规定逆时针旋转为正角，顺时针为负角。当滑块沿倾角为 α 的粗糙斜面滑下，达到稳定后，滑块沿斜面匀加速下滑，此时 $\angle O_1OP$ 的大小可能是

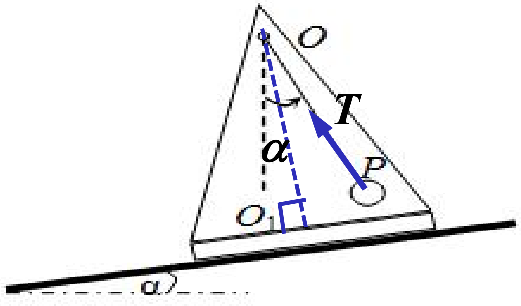


图 2

A. $\angle O_1OP \le 0$　　　　B. $0 < \angle O_1OP < \alpha$

C. $\angle O_1OP \ge \alpha$　　　　D. 无法确定

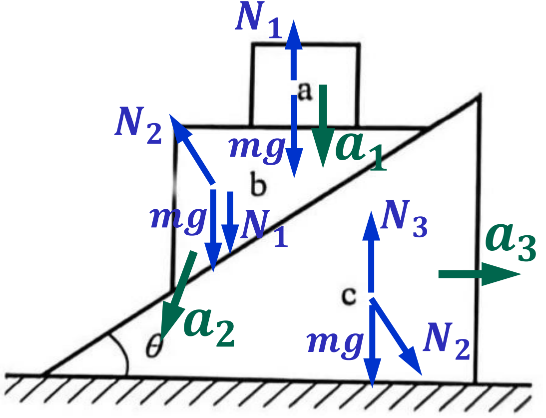
要点：作图，角度不同，摆线拉力在斜面上的投影方向不同。

滑块：　$mg\sin\alpha - f = ma$

摆球：　$mg\sin\alpha - T\sin(\alpha - \angle O_1OP) = ma$

【 38预-11 】*

11. 如图所示，物块 a、b 叠放在一倾角为 θ 的物块 c 的斜面上，物块 c 置于水平地面上．已知物块 a、b、c 的质量均为 m，物块 b 的上表面水平且足够宽，重力加速度大小为 g．不计所有接触面的摩擦．开始时，用外力使物块 a、b、c 均处于静止状态．求撤除该外力后，在物块 b 到达物块 c 斜面的底端之前，各物块运动的加速度以及物块 a、b 之间以及物块 b、c 之间的正压力大小．



题 11 图

方法：隔离物体法＋ 沿斜面下滑的牵连条件 (相对运动)

物块 a： $mg - N_1 = ma_1$

物块 b： $mg + N_1 - N_2\cos\theta = ma_{2\perp}$

$N_2\sin\theta = ma_{2\parallel}$

物块 c： $N_2\sin\theta = ma_3$

牵连关系： $a_1 = a_{b\perp}$ $\boxed{\tan\theta = \dfrac{a_{2\perp}}{a_{2\parallel} + a_3}}$

$$2mg - N_2\cos\theta = 2ma_{2\perp}$$

$$2g - a_{2\parallel}\cot\theta = 2a_{2\perp}$$

$$2a_{2\parallel}\sin\theta = a_{2\perp}\cos\theta$$

求解

得 分

1. 观察火箭的发射，火箭单位时间内喷出质量为 ρ 的燃料，喷出燃料相对于火箭的速度为 u，ρ、u 不变。随着火箭上升的速度不断变大，火箭所受推力的大小变化情况是________________________，

t 时刻： 火箭质量 m (包含即将喷出的Δm)，速度为 v；

$t+\Delta t$ 时刻：Δm 喷出，相对于火箭速度为 u，相对于地面速度为$v-u$，

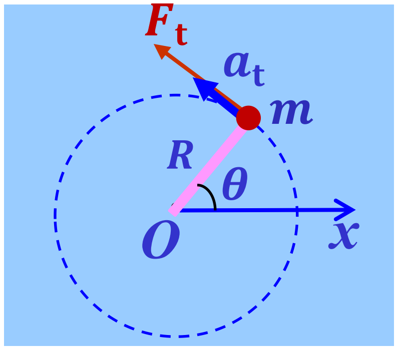
Δm 所受火箭的推力为F，由牛顿第二定律

$$F=\Delta m\frac{(v-u)-v}{\Delta t}=-\frac{\Delta m}{\Delta t}\cdot u=-\rho u$$

此绝对值为喷出 Δm 给火箭的推力的大小，为常量。

2. 转动形式的牛顿第二定律 (转动定理)

➢ 考虑由轻质细杆连接的小球 m 绕着杆的另一端的垂直轴做圆周运动



线量： 切向加速度 $a_t = \dfrac{dv}{dt}$ 　法向加速度 $a_n = \dfrac{v^2}{R}$

角量： 角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ 　角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

线量与角量之间的关系： $v = \omega R$ 　$a_t = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\alpha$ 　$a_n = \omega^2 R$

转动动力学： $F_t = ma_t$ 　$F_t = mR\alpha$ 　$F_t R = mR^2\alpha$

力矩：$M = F_t R$

转动定理： $\boxed{M = J\alpha}$

转动惯量：$J = mR^2$

匀加速转动 (α =恒量)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

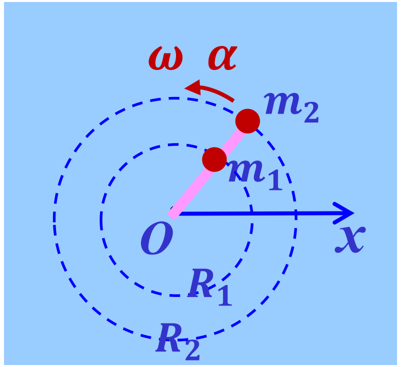
$$\theta - \theta_0 = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

2. 转动形式的牛顿第二定律 (转动定理)

- 考虑由轻质细杆连接的2个小球绕着杆的另一端的垂直轴做圆周运动

两小球绕圆心轴转动的角速度相等，角加速度相等



定轴转动：1个运动自由度（位置角θ）

m_1 : $M_1 = J_1\alpha$

m_2 : $M_2 = J_2\alpha$

转动惯量 $J_1 = m_1R_1^2$

$J_2 = m_2R_2^2$

绕质心的转动 ← $\sum_i M_i = J\alpha$

$J = m_1R_1^2 + m_2R_2^2$

杆上N个质点 $J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$

刚体定轴转动定理：刚体绕定轴转动的角加速度与所受的对轴的合外力矩成正比，与对轴的转动惯量成反比。

连续质量分布杆的转动惯量 $J = \sum_{i\to\infty} \Delta m_i r_i^2 = \int r^2\,\mathrm{dm}$

随质心的平动 ← $\sum_i F_{ix} = ma_x$

物体运动图像：

随质心的平动 + 绕质心的转动

三、非惯性系

相对于惯性系以加速度$\vec{a}_0$运动，牛顿运动定律在其中不成立。

动力学方程变为：$\boxed{\sum_i \vec{F}_i + (-m\vec{a}_0) = m\vec{a}}$

引入惯性力

$$\vec{F}^* = -m\vec{a}_0$$

分量形式：$\sum_i F_{ix} + (-ma_{0x}) = ma_x$

- 变换到非惯性系进行讨论，可能使问题简化；
- 惯性力的性质与重力相似，$m[\vec{g} + (-\vec{a}_0)]$可视为等效重力，在旋转参考系中，惯性离心力$m\omega^2 r$与有心力性质相似，均可引入惯性力势能的概念；
- 特殊的非惯性系——质心参考系：惯性力的作用效果被抵消，牛顿运动定律及其推理的原有形式在其中成立。

【 40预-8 】 * *　思考：为什么车厢中空气浮力指向斜上方

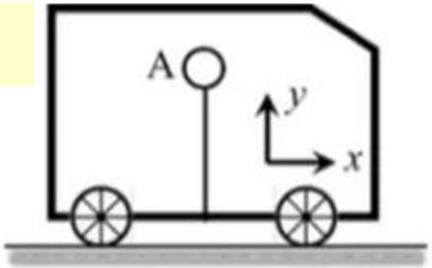
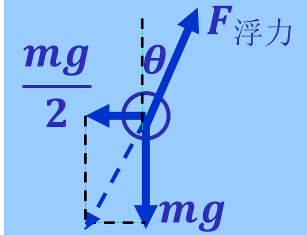


图 8a

8. 如图 8a，初始时在水平地面上静止的密闭车厢内的空气中悬浮一个充满氦气的气球 A，它通过柔软长轻绳固定在车厢底板上，绳长远大于气球半径。若车厢沿水平方向从静止开始以大小为 $\frac{g}{2}$（g 为重力加速度大小）的加速度做匀加速直线运动，则气球的位置相对于车厢稳定后，拉气球的轻绳将沿车厢运动方向______(填“前倾”、“后仰”或“保持竖直向上”)，且轻绳相对于竖直向上方向的夹角大小为______。

方法一：车厢参考系　为非惯性系，引入惯性力$mg/2$

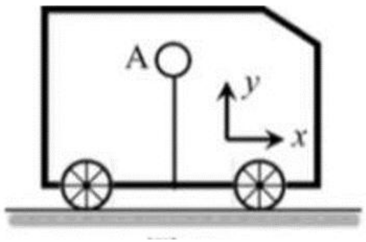


考虑同体积空气球 (想象存在)，无需绳拉静止于空气中，三力平衡

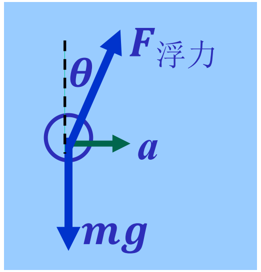
浮力为 $F_{浮力} = m\sqrt{g^2 + (\frac{g}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}mg}{2}$　方向为 $\theta = \arctan\frac{1}{2}$

再考虑氦气球，其所受空气浮力的大小和方向不变，氦气球的重力和非惯性力等比例减小，其合力(等效重力)仍然与竖直线夹θ角，与浮力方向相反，所以平衡时绳拉力也要沿着该方向，所以绳前倾与竖直线夹角为θ。

方法二：地面系



考虑静止在空中的同体积的空气球，受力分析如下：



由于其跟随车厢做加速度为 $\frac{g}{2}$ 的加速运动，

因此有

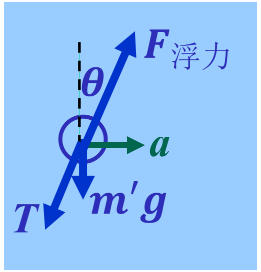
$$F_{浮力}\sin\theta = m\frac{g}{2}$$

$$F_{浮力}\cos\theta = mg$$

$$\Rightarrow F_{浮力} = \frac{\sqrt{5}mg}{2} \qquad \theta = \arctan\frac{1}{2}$$

注意：这里 m 为空气球的质量

再考虑氦气球，其所受空气浮力的大小和方向与空气球的一样，由于氦气球质量比空气球质量小得多，所以如果没有绳拉着，此时其受力如下：



$$F_{浮力}\sin\theta - T_x = m'\frac{g}{2}$$

$$F_{浮力}\cos\theta - T_y - m'g = 0$$

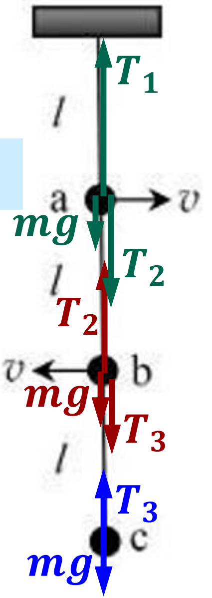
$$\Rightarrow T_x = F_{浮力}\sin\theta - m'\frac{g}{2}$$

$$T_y = F_{浮力}\cos\theta - m'g$$

$$\Rightarrow \frac{T_x}{T_y} = \frac{1}{2}$$

所以拉力与浮力方向相反，即与竖直线夹θ角且前倾。

3. 三个质量皆为 m 的小球a、b、c由三段长度皆为 l 的不可伸长的轻细线 L_1、L_2、L_3 相继连接，竖直悬挂，并处于静止状态，如图 3a 所示。在某一时刻，小球a、b受到水平方向的冲击，分别获得向右、向左的大小为 v 的速度。此时，中间那段细线 L_2 的张力大小 39预-3*



下面小球相对于上面小球做圆周运动，从上到下分别在随上面小球运动的参考系(非惯性系，引入惯性力)中分析下面小球的运动状况，求解关键是上面小球相对于地面参考系运动的加速度 a，相应惯性力为 $F^* = -ma$。

小球 a：绕悬挂点(静止不动)做半径为 l_1 速率为 v 的圆周运动

地面参考系 ：$T_1 - T_2 - mg = \dfrac{mv^2}{l}$　　小球 a对地加速度 $a_1 = \dfrac{mv^2}{l}$

小球 b：相对于小球 a 做半径为 l 速率为 $2v$ (方向向左)的圆周运动　　小球 b 对地加速度

小球 a 参考系(非惯性系)：$T_2 - T_3 - mg - ma_1 = \dfrac{m(2v)^2}{l}$

$$a_2 = a_{21} + a_1 = \frac{m(2v)^2}{l} + \frac{mv^2}{l}$$

小球 c：相对于小球 b 做半径为 l 速率为 v (方向向右)的圆周运动

小球 b 参考系(非惯性系)：$T_3 - mg - ma_2 = \dfrac{mv^2}{l}$

解得 ： $T_3 = mg + \dfrac{6mv^2}{l}$　　$T_2 = 2mg + \dfrac{11mv^2}{l}$　　$T_1 = 3mg + \dfrac{12mv^2}{l}$

四、 力/力矩的时间或空间的积累效果

—— 运动状态 (动量、动能、角动量) 的改变

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Downarrow$$

- 力的时间累积效应: 冲量、动量定理 $\quad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$
- 力的空间累积效应: 功、 动能定理 $\quad \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$
- 力矩的时间累积效应：冲量矩、角动量定理 $\quad \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$
- 力矩的空间累积效应：力矩的功、动能定理

1. 力的时间积累效果 —— 冲量 动量定理

$$F_x = m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad F_x\Delta t = m\Delta v_x = \Delta(mv_x)$$

冲量： $I_x = F_x\Delta t$

质点所受合力在 x 方向分量的**冲量**等于质点 x 方向**动量的增量**。

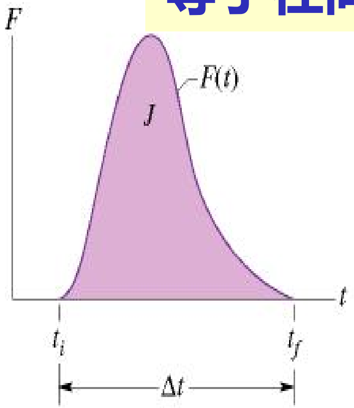
$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p} \qquad \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

冲量 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$

动量定理：在一段时间内质点所受合外力的冲量等于在同一时间内质点的动量的增量。

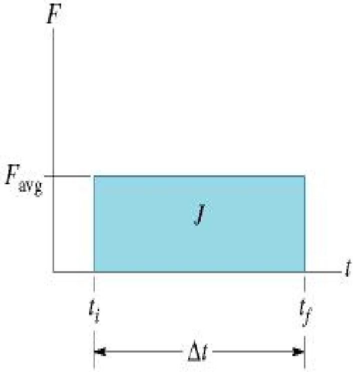
碰撞问题：作用时间极短，冲力却很大

The collision of a ball with a bat collapses part of the ball.

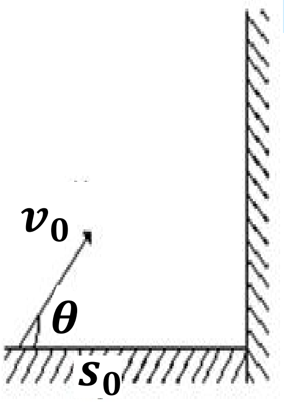


平均冲力：

$$\overline{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$



例：特警战士距墙s_0，以速度 v_0 起跳，再用脚蹬墙面一次，身体变为竖直向上的运动以继续升高，墙与鞋底之间的静摩擦因数为 μ。求能使人体重心有最大总升高的起跳角 θ。【26北京力学决-8】**



登墙前的速度和高度：

$$v_x = v_0\cos\theta \qquad v_y = v_0\sin\theta - g\frac{s_0}{v_0\cos\theta}$$

$$h_1 = v_0\sin\theta\frac{s_0}{v_0\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{s_0}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

设脚登墙时间为Δt，登墙过程忽略人体重力，由动量定理:

水平方向： $N\Delta t = m\Delta v_x = mv_0\cos\theta$

竖直方向： $\mu N\Delta t = m\Delta v_y$

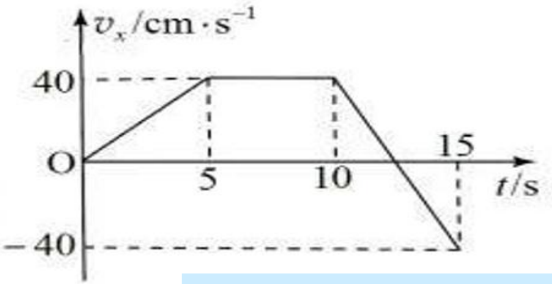
总高度：$H = h_1 + h_2$

求极值

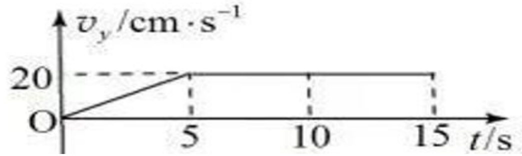
人登墙后竖直向上的速度和高度：

$$v_y' = v_y + \Delta v_y = v_0\sin\theta - g\frac{s_0}{v_0\cos\theta} + \mu v_0\cos\theta \qquad h_2 = \frac{v_y'^2}{2g}$$

14.（40 分）一质量为 $M=1000\ \text{kg}$ 的封闭车厢在水平地面上运动。车厢内底面水平。车厢内一乘客试通过车厢内的实验来研究车厢在水平地面上的运动。他在车厢底面上建立与底面固连的平面直角坐标系（xOy 系），并在坐标原点O放置一质量为 $m=5.0\ \text{kg}$ 的物块 A。在 $t=0$ 时，A 从静止开始运动。在 $0\le t\le 15\ \text{s}$ 时间段内，A 在 xOy 系中 x、y 方向上的速度 v_x、v_y 与时间 t 的关系分别如图 14a、b 所示。已知物块 A 与车厢内底面之间滑动摩擦系数为 $\mu=0.20$，重力加速度大小 $g=10\ \text{m/s}^2$。



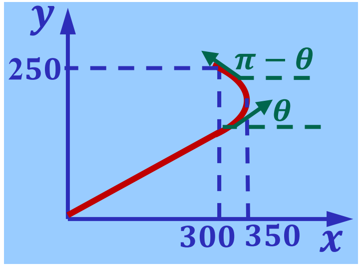
【 39预-14 】 *



（1）求 $t=15\ \text{s}$ 时，物块 A 在 xOy 系中的位置；

（1）由 v - t 曲线下面积可求出 x 和 y 方向位移，即物块A的位置

$$x=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 40+40\cdot 5+0=300\text{cm}\qquad y=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 20+20\cdot 10=250\text{cm}$$



0-10s区间：$v_x=2v_y$，直线运动，与x 轴夹角θ不变，$\cos\theta=\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

10-15s区间：物体 x 方向做匀减速运动并回到10s时位置，速度与10s时等大反向，y 方向做匀速运动，合运动类似竖直轴为 x 轴的上抛运动，考虑对称性，前后半段相同 x 处物体运动方向与x 轴夹角分别为θ和$\pi-\theta$，有$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

（2）在地面上建立静止的坐标系 $x'O'y'$，使 x' 轴、y' 轴分别与 xOy 系的 x 轴、y 轴方向两两相同。求在坐标系 $x'O'y'$ 中，车厢在 x' 方向所受到的合力在整个过程（$0\le t\le 15$ s）中的冲量。

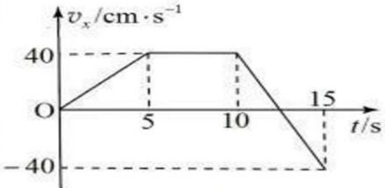
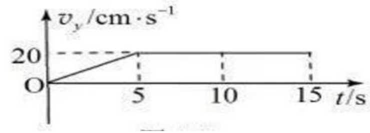


图 14a

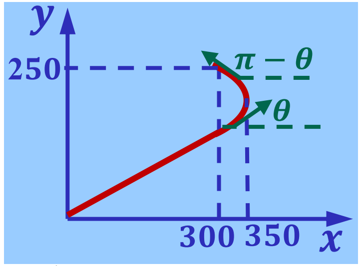


车厢参考系：为非惯性系，引入惯性力$\vec{F}_{惯}=-m\vec{a}'$($\vec{a}'$为地面参考系中车厢的加速度)，考虑 x 方向运动，物体受惯性力$F_{惯x}=-ma'_x$和摩擦力$f_x=-\mu mg\cos\theta$ (θ 为任意时刻运动方向与 x 轴方向的夹角)，则

$$-ma'_x-\mu mg\cos\theta=ma_x \qquad a'_x=-a_x-\mu g\cos\theta$$

地面参考系：车厢所受合力在x'方向分量为 $F'_x=Ma'_x=-M(a_x+\mu g\cos\theta)$

整个过程其冲量为 $I'_x=\int_0^{15s}F'_x\mathrm{d}t=-M\int_0^{15s}(a_x+\mu g\cos\theta)\mathrm{d}t$



其中 $\int_0^{15s}a_x\mathrm{d}t=\int_0^{15s}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_0^{-0.4m/s}\mathrm{d}v_x=-0.4\mathrm{m/s}$

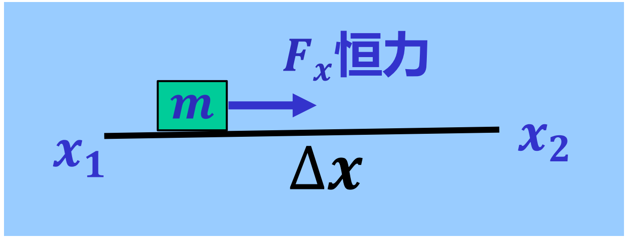
$$\int_0^{15s}\mu g\cos\theta\mathrm{d}t=\int_0^{10s}\mu g\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{d}t+\int_{10s}^{15s}\mu g\cos\theta\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{10s}\mu g\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{d}t+\int_{10s}^{12.5s}\mu g\cos\theta\mathrm{d}t+\int_{12.5s}^{15s}\mu g\cos(\pi-\theta)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\times0.2\times10}{\sqrt{5}}\times10+0$$

$\Rightarrow I'_x$

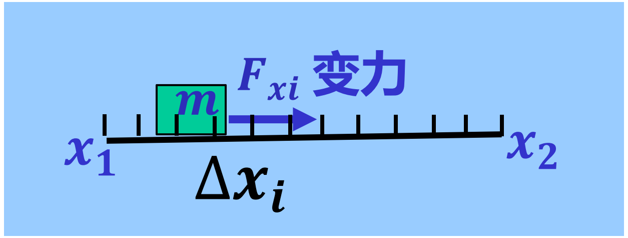
2. 力的空间积累效果 — 功 动能定理



恒力 $F_x = m\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$ 功 $W_{F_x} = F_x \Delta x$

$$F_x \Delta x = m\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\Delta x = m(v_{x2} - v_{x1})\,\frac{v_{x2} + v_{x1}}{2}$$

$$W_{F_x} = \frac{1}{2}mv_{x2}^2 - \frac{1}{2}mv_{x1}^2$$



变力 $W_{F_x} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_i F_{xi}\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x \mathrm{d}x$

功 $$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\int F\cos\theta |\mathrm{d}\vec{r}|$$

动能定理 $$\boxed{W_{AB} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}$$

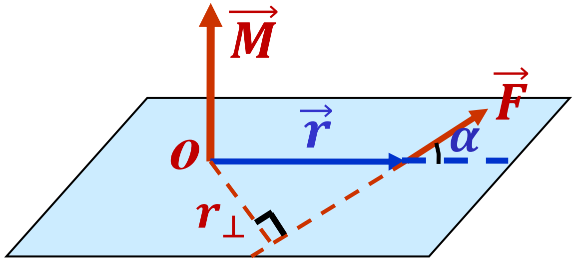
合外力对质点所做的功等于质点动能的增量

3. 力矩的时间累积效应：冲量矩、角动量定理

➢ 力矩

力 $\vec{F}$ 相对惯性系中一固定点的力矩：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

大小：$M = rF\sin\alpha = F \cdot r_{\perp}$　方向：右手螺旋法

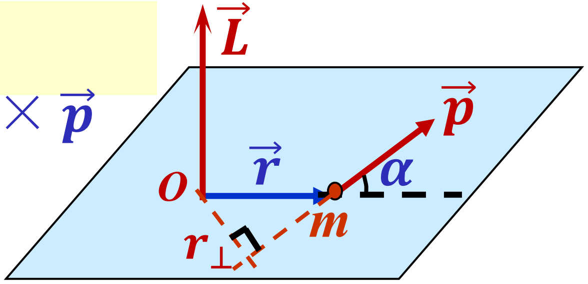


➢ 角动量矢量

动量为 $\vec{p}$ 的质点对惯性系中一固定点的角动量：$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

大小：$L = mvr\sin\alpha$　方向：右手螺旋法

作圆周运动的质点对圆心的角动量 $L = mvr$



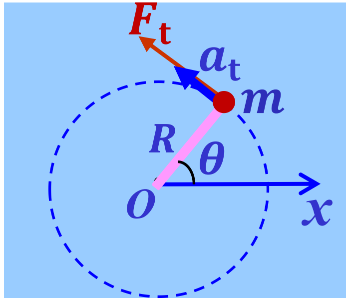
力矩、角动量一定是相对于惯性系中一固定点定义的

➢ 角动量定理

考虑小球 m 做圆周运动:

$$F_t = ma_t \quad RF_t = Rm\frac{dv}{dt} \quad RF_t = \frac{d(R\cdot mv)}{dt}$$

对圆心：$M = \dfrac{dL}{dt}$



一般情况: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{r}\times\dfrac{d\vec{p}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} = \vec{r}\times\dfrac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v}\times m\vec{v} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{M}$

质点角动量定理：质点对某一点的角动量随时间的变化率等于质点所受合外力对同一点的力矩。

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,dt = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} d\vec{L}$$

$\Rightarrow$冲量矩 $\vec{L}_1$

小球 m 做定轴转动：$L = R\cdot mv = R\cdot m\omega R = mR^2\omega = J\omega \quad \dfrac{dL}{dt} = J\dfrac{d\omega}{dt} = J\alpha$

应用：定轴转动定理 $\boxed{M = J\alpha}$

转动惯量 $J = \sum\limits_{i\to\infty}\Delta m_i r_i^2 = \int r^2\,dm$

➢ 角动量守恒定律

当 $\vec{M} = 0$ 时，$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \vec{L} =$常矢量

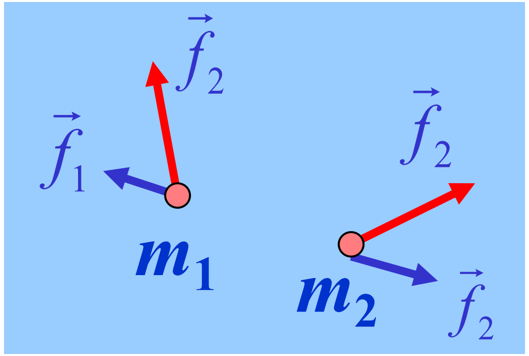
惯性系中质点相对于某一固定点所受合外力矩为零，则对该固定点的角动量保持不变。

第三部分　质点系动力学

两质点 $m_1\,,m_2$ 组成的系统：

$$m_1:\quad \vec{F}_1+\vec{f}_1=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t}$$

$$m_2:\quad \vec{F}_2+\vec{f}_2=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}$$



外力： $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2$

内力： $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$

$$\vec{f}_1=-\vec{f}_2$$

一、质点系的动量定理

上面二式相加 $(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t=\mathrm{d}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)$

质点系的动量定理

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{P}_2-\vec{P}_1}$$

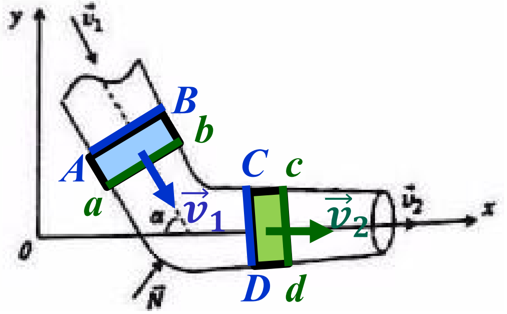
质点系总动量

$$\vec{P}=\sum_i\vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i$$

质点系**总动量**的变化**仅决定于系统所受的外力**，与系统的**内力无关**。即只有外力的冲量才能改变整个质点组动量，内力冲量虽然可以使个别质点的动量改变，但不能改变整个质点组的总动量。

例：管子的弯头一端与水平成 α 角，另一端水平。管内流体单位时间内流过的液体体积 (体积流量)为 Q，流量恒定，流体的密度为ρ，管子进口的截面为S1, 液体流入速度为1，出口的截面为S2,液体流出速度为2，不计流体自重。求管壁给流体的作用力。

连续质量运动问题：考虑对象为质点系、采用微元法



t 时刻：考虑跨过弯管的一段流体 ABCD

$t+\Delta t$ 时刻：该流体往前流动到了 abcd 处

这相当于Δt 时间内，流体元ΔmAbba 段流到了 CDdc 段处。

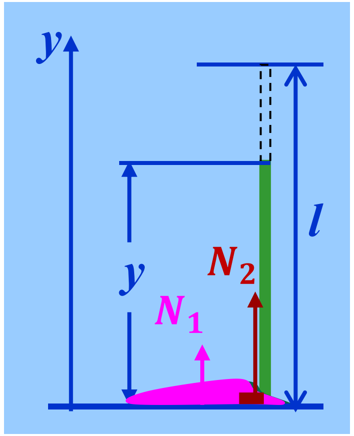
由动量定理: $$\vec{N}\cdot\Delta t=\Delta m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\qquad \Delta m=\rho Q\Delta t$$

$$\vec{N}=\rho Q(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\qquad N_x=\rho Q(v_2-v_1\cos\alpha)$$

$$N_y=\rho Q[0-(-v_1\sin\alpha)]$$

例：质量分布均匀，不可伸长的长为l、线密度为ρ的柔软绳子竖直悬挂，下端正好碰地。绳子从静止开始下落，试证明在下落过程中，地面所受压力等于已落地的绳子重量的三倍。

方法一 (隔离物体法、微元法)： $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内地面对各绳段的作用力



t 时刻：尚未落地部分绳长为 y，其下落速度为：$v = \sqrt{2g(l-y)}$

$t + \mathrm{d}t$ 时刻：长为$v\mathrm{d}t$的一段绳元落到地面，其质量为 $\mathrm{d}m = \rho v \mathrm{d}t$

地面所受压力等于该时间内刚落地绳元$\mathrm{d}m$对地的压力和已落地长为$l-y$的绳段对地的压力之和，设地面对它们的反作用力分别为N_1和N_2。

对绳元$\mathrm{d}m$应用动量定理：$(N_1 - \mathrm{d}m \cdot g)\mathrm{d}t = 0 - (-\mathrm{d}m \cdot v)$

忽略二阶小 $\mathrm{d}m \cdot \mathrm{d}t$ (即忽略绳元 $\mathrm{d}m$ 的重力冲量)：$N_1 = \dfrac{\mathrm{d}m \cdot v}{\mathrm{d}t} = \rho v^2 = 2\rho g(l-y)$

地面所受压力：$N = N_1 + N_2 = 2\rho g(l-y) + \rho g(l-y) = 3\rho g(l-y)$

方法二 (整体法、微积分): 以绳整体为对象应用质点系动量定理：$(N - Mg)\mathrm{d}t = \mathrm{d}(Mv)$

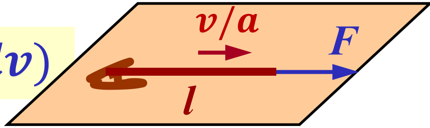
$$(N - \rho l g)\mathrm{d}t = \mathrm{d}[(\rho(l-y) \cdot 0 + \rho y \cdot (-v)]$$

地面对绳的支持力：$N = \rho l g - \dfrac{\mathrm{d}(\rho y v)}{\mathrm{d}t} = \rho l g - \rho v \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \rho y \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho l g + \rho v^2 - \rho y g = 3\rho g(l-y)$

例：线密度为 ρ 的匀质细绳盘绕于光滑水平桌面上，施于绳一端力F使绳沿着水平方向以恒定加速度 a 或恒定速度 v 逐渐被拉直，求绳拉直长度为 l 时力 F 的大小及其所做的功。

方法一 (整体法、微积分): 以拉直的长度为 l 的绳为研究对象，由质点系动量定理：

$$F\mathrm{d}t = \mathrm{d}(\rho l v)$$



施于绳端的力：$F = \dfrac{\mathrm{d}(\rho l v)}{\mathrm{d}t} = \rho v \dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} + \rho l \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho v^2 + \rho a y$

力F做的功：$W = \int_0^l F\mathrm{d}l$

恒定加速度 a $\quad v^2 = 2al \quad F = 3\rho a l$ 拉力$F \propto l$ $\quad W = \int_0^l 3\rho a l \mathrm{d}l = \dfrac{3}{2}\rho a l^2 = \dfrac{3}{4} m v^2$

$m = \rho l$

恒定速度 v：$a = 0 \quad F = \rho v^2$ 拉力 F 恒定 $\quad W = Fl = \rho v^2 l = mv^2$ $\quad W > \dfrac{1}{2}mv^2 - 0$

盘绕软绳拉直问题的推论：

① 当外力 F 与拉直长度 l 成正比，即$F = kl$ 时，绳将以恒定加速度 a 被拉直： $kl = 3\rho a l$

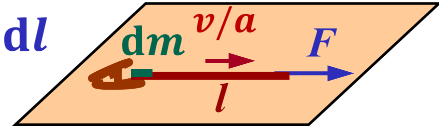
② 当外力 F 恒定时，绳将以恒定速率 v 被拉直：$F = \rho v^2$

不能利用动能定理计算拉力F做的功，因为绳在被拉直开始运动过程中存在能量损失。

例：线密度为 ρ 的匀质细绳盘绕于光滑水平桌面上，施于绳一端力F使绳沿着水平方向以恒定加速度 a 或恒定速度 v 逐渐被拉直，求绳拉直长度为 l 时力 F 的大小。

方法二 (隔离物体法、微元法)： $t \to t + \mathrm{d}t$：开始运动小绳元 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}l$

已在运动的绳段 $m = \rho l$



- 恒定加速度 a 运动：$v = at$　$l = \frac{1}{2}at^2$

小绳元 $\mathrm{d}m$：速度 $0 \to v + \mathrm{d}v$，受力F_1，动量定理：$F_1 \mathrm{d}t = \mathrm{d}m \cdot (v + \mathrm{d}v)$

$$\mathrm{d}m = \rho v \mathrm{d}t = \rho a t \mathrm{d}t \qquad F_1 = \frac{\mathrm{d}m \cdot (v + \mathrm{d}v)}{\mathrm{d}t} \approx v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = v\frac{\rho a t \mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \rho v^2 = 2\rho l a$$

已运动的绳段 m：速度$v \to v + \mathrm{d}v$，受力F_2，动量定理 $F_2 \mathrm{d}t = m \mathrm{d}v$　$F_2 = \frac{m \mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho l a$

绳端合力为：$F = F_1 + F_2 = 3\rho l a$

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}_{F_2} + \underbrace{v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}}_{F_1}$$

- 恒定速度v 运动：$a = 0$　$\mathrm{d}m = v \mathrm{d}t$

小绳元 $\mathrm{d}m$：速度 $0 \to v$，受力F_1，由动量定理：$F_1 \mathrm{d}t = \mathrm{d}m \cdot v$　$F_1 = \frac{\mathrm{d}m \cdot v}{\mathrm{d}t} = \rho v^2$

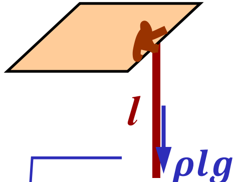
已运动的绳段 m：速度不变，受力$F_2 = 0$

绳端合力为：$F = F_1 + F_2 = \rho v^2$

拉力 F 的冲量可看作是用于
(1) 使静止小绳元 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}l$ 改变动量
(2) 使已在运动的绳段$m = \rho l$ 的改变动量。

例：一长为 L，质量为 m 的匀质细绳(质量线密度为ρ)团放在光滑桌面边沿，一端正好从桌面边沿开始滑落，忽略摩擦，求到绳另一端正好滑离桌面所用的时间和绳此时的速度。

方法一 (整体法，微积分)： 对滑落绳段 l 应用动量定理： $\rho l g \mathrm{d}t = \mathrm{d}(\rho l v)$



$$\rho l g = \frac{\mathrm{d}(\rho l v)}{\mathrm{d}t} = \rho \frac{\mathrm{d}(lv)}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \rho v \frac{\mathrm{d}(lv)}{\mathrm{d}l}$$

$$l^2 g \mathrm{d}l = (lv)\mathrm{d}(lv)$$

$$\int_0^L l^2 g \mathrm{d}l = \int_0^{Lv} (lv)\mathrm{d}(lv)$$

$$\frac{1}{3}L^3 g = \frac{1}{2}L^2 v^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2}{3}Lg}$$

不能用机械能守恒，因为绳在拉直的过程中存在能量损失！

$$\frac{1}{2}\rho L v^2 = \rho L g \frac{L}{2}$$

$$v = \sqrt{gL}$$

错误

$$L = \frac{1}{2}\frac{g}{3}T^2 \qquad a = \frac{1}{3}g \qquad v = aT$$

绳以$\frac{1}{3}g$的加速度匀加速滑落桌面

$$v = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{3}lg}$$

$$\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{\frac{2}{3}lg}} = \mathrm{d}t$$

$$\int_0^L \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{\frac{2}{3}lg}}$$

$$T = \sqrt{\frac{6L}{g}}$$

方法二 (类比法)： 可与水平方向拉绳结果相类比，绳在滑落绳的重力 $\rho l g$ 作用下运动

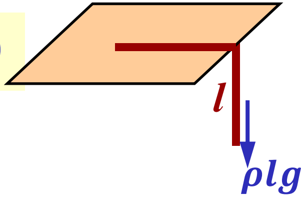
重力 $F_G = \rho l g \propto l$，绳以恒定加速度a做滑落桌面的运动： $\rho l g = 3\rho a l$ $\qquad a = \frac{1}{3}g$

整段绳滑离桌面的时间为 T： $L = \frac{1}{2}aT^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{3}T^2$ $\qquad T = 2\sqrt{\frac{3L}{2g}}$

整段绳滑离桌面时的速度 v： $v^2 - 0 = 2aL$ $\qquad v = \sqrt{\frac{2}{3}Lg}$

例：一长为 L，质量为 m 的匀质细绳(质量线密度为ρ)拉直了放于光滑桌面下，绳的放置方向垂直于桌边沿，绳的一端正好位于桌面边沿并恰好开始滑落，忽略摩擦，求绳另一端正好滑离桌面时的速度。

方法一 (整体法，微积分)：对滑落绳段 l 应用动量定理：$\rho l g \mathrm{d}t = \mathrm{d}(\rho L v)$



$$\rho l g = \frac{\mathrm{d}(\rho L v)}{\mathrm{d}t} = \rho L \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \rho L v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}l} \qquad l g \mathrm{d}l = L v \mathrm{d}v$$

下落段绳长度为 l 时 $\int_0^l l g \mathrm{d}l = \int_0^{v_l} L v \mathrm{d}v \quad \frac{1}{2} l^2 g = \frac{1}{2} L v_l^2 \quad v_l = \sqrt{\frac{l^2}{L} g}$

绳另一端正好滑离桌面时的速度为 $v_L = \sqrt{\frac{L^2}{L} g} = \sqrt{gL}$

方法二 (机械能守恒)：滑落过程中仅重力做功，机械能守恒：

绳不存在拉直的过程，过程中没有能量损失！

$$\frac{1}{2}\rho L v^2 = \rho L g \frac{L}{2} \qquad v = \sqrt{gL}$$

动量守恒定律

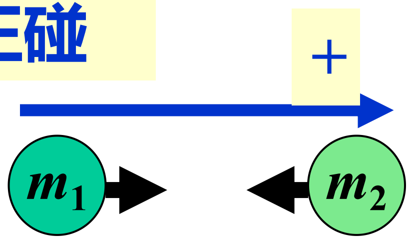
由质点系的动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ 其中 $\vec{P}_1 = \sum_i \vec{p}_{i1} = \sum_i m_i \vec{v}_{i1}$

当合外力 $\vec{F} = 0$ 时，$\vec{P} =$ 常矢量，即 $\vec{P}_1 = \vec{P}_2$ $\quad \vec{P}_2 = \sum_i \vec{p}_{i2} = \sum_i m_i \vec{v}_{i2}$

质点系动量守恒定律：若系统所受合外力为零，则系统的总动量保持不变。

- ✓ 当外力与内力相比小很多(如爆炸过程)，仍可忽略外力应用动量守恒;
- ✓ 合外力某方向分量为零，该方向动量守恒，如当 $\sum \vec{F}_{ix} = 0$，则$\sum \vec{p}_{ix} =$常数;
- ✓ 只适用于惯性系;
- ✓ 比牛顿定律更普遍的基本定律，适用于宏观和微观、低速和高速领域。

应用：完全弹性碰撞：一维正碰



动量守恒：

$$m_1v_{1f}+m_2v_{2f}=m_1v_{1i}+m_2v_{2i}$$

动能守恒：

$$\frac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{f}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{f}}^2=\frac{1}{2}m_1v_{1\mathrm{i}}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{i}}^2$$

$$\Downarrow$$

$$v_{1f}-v_{2f}=-(v_{1i}-v_{2i})$$

碰前两物体彼此接近的速度等于碰后两物体彼此离开的速度。

【 40预-11 】 *

11.（40分）如图11a和图11b，在光滑的水平面上建立xOy直角坐标系。A、B、C三个小球（视为质点）质量均为m。初始时小球均静止，C、B连线沿x方向，间距为L；A、B用长为L、不可伸长、完全没有弹性的柔软轻绳连接，B、A连线方向与C、B连线方向垂直，A与B、C连线的距离为$0.6L$。现使A以大小为v_0的速率沿x轴正方向运动。试在下述两种情形下，求在A、B间软绳刚刚被拉紧后的瞬间A、B、C三球各自的速度：

（1）B、C间由原长为L、劲度系数为k的轻质弹簧连接（见图11a）；

（2）B、C间由长度为L的柔软轻绳（材质跟A、B间的软绳相同）连接（见图11b）。

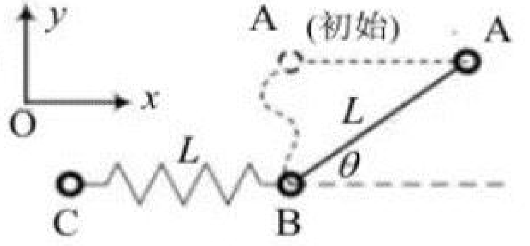


图 11a

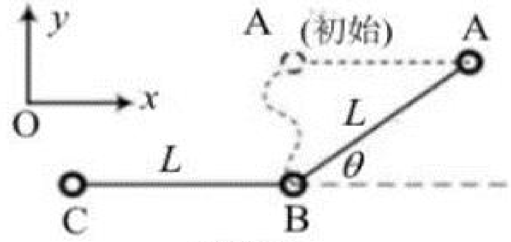


图 11b

要点：典型的碰撞问题，根据动量守恒+约束条件+相对运动列方程求解。

动量守恒：系统不受外力的方向((1)2球; (2)3球) 动量守恒(可考虑水平或小球连线方向)，单球在绳拉直瞬间在垂直于绳的方向上动量守恒；

约束条件：用不可伸长的轻绳拉直连接的两球沿绳方向速度分量相同；

相对运动：由不可伸长的绳拉直连接的两球间的相对运动为圆周运动。

解：(1)

方法一

A、B系统动量守恒：

$$mv_{Ax} + mv_B\cos\theta = mv_0$$

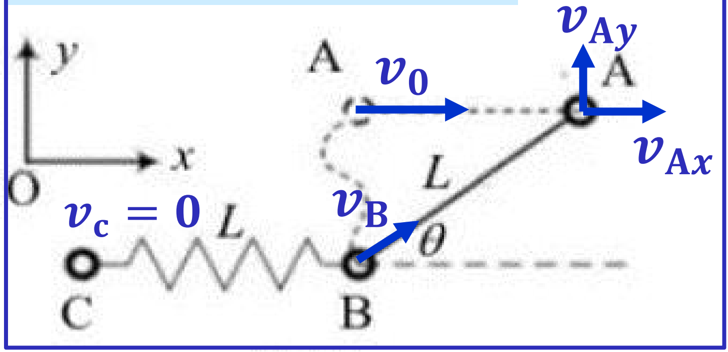
$$mv_{Ay} + mv_B\sin\theta = 0$$

A、B约束条件：$v_{Ax}\cos\theta + v_{Ay}\sin\theta = v_B$

➡ $v_{Ax} = v_0\dfrac{1+\sin^2\theta}{2}$ $\quad v_{Ay} = -v_0\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{2}$ $\quad v_B = v_0\dfrac{\cos\theta}{2}$

$$\vec{v}_A = \frac{v_0}{2}\left((1+\sin^2\theta)\vec{i} - \sin\theta\cos\theta\vec{j}\right) \qquad \vec{v}_B = \frac{v_0}{2}\left(\cos^2\theta\vec{i} + \sin\theta\cos\theta\vec{j}\right)$$

方法一：x-y 方向



方法二

A、B系统动量守恒：

$$mv_{A\parallel} + mv_B = mv_0\cos\theta$$

$$mv_{A\perp} = mv_0\sin\theta$$

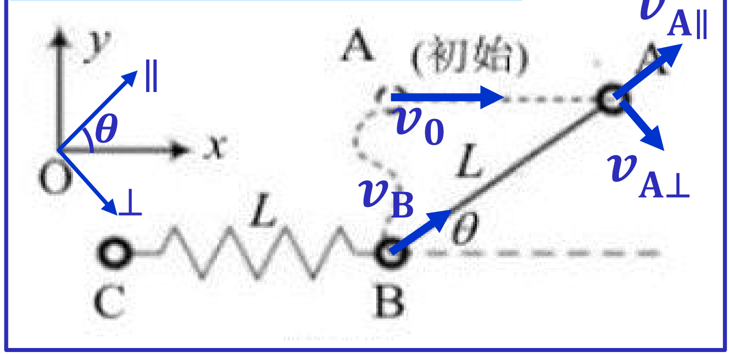
A、B约束条件：$v_{A\parallel} = v_B$

➡ $v_{A\parallel} = v_0\dfrac{\cos\theta}{2}$ $\quad v_{A\perp} = v_0\sin\theta$ $\quad v_B = v_0\dfrac{\cos\theta}{2}$

$$\vec{e}_\parallel = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \qquad \vec{e}_\perp = \sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}$$

➡ x-y 坐标系中的矢量表达式

方法二：∥-⊥方向



(2) A、B和C系统动量守恒：

$$v_{Ax}+v_{Bx}+v_{C}=v_0$$

$$v_{Ay}+v_{By}=0$$

B、C 约束条件：

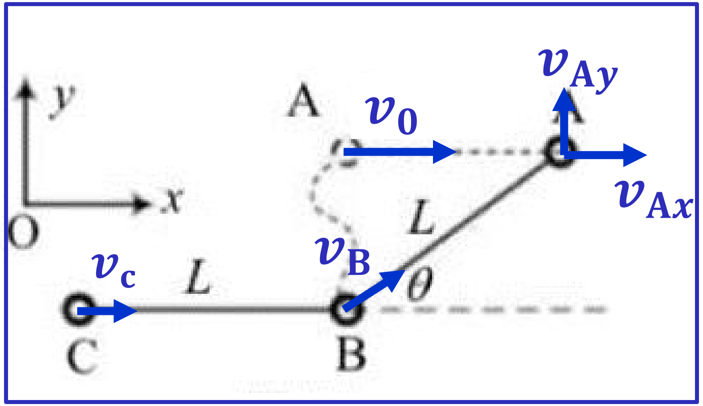
$$v_{Bx}=v_C$$

垂直于AB连线方向A动量守恒：

$$v_{Ax}\sin\theta-v_{Ay}\cos\theta=v_0\sin\theta$$

A相对于B的速度v_{AB}垂直于连线：

$$(v_{Ax}-v_{Bx})\cos\theta+(v_{Ay}-v_{By})\sin\theta=0$$



$$\sin\theta=\frac{3}{5}\qquad\cos\theta=\frac{4}{5}$$

联立求解得：

$$\vec{v}_A=\frac{13}{21}v_0\hat{x}-\frac{2}{7}v_0\hat{y}$$

$$\vec{v}_B=\frac{4}{21}v_0\hat{x}+\frac{2}{7}v_0\hat{y}$$

$$\vec{v}_C=\frac{4}{21}v_0\hat{x}$$

12.（40 分）已知重力加速度大小为 g。假设空气阻力可忽略。

【 40预-12 】 *

（1）将一个质量为 m_2 的小球 B 放在一个质量为 m_1 的大球 A 的上表面上，初始时 A 的下底离地面高度为 h_0，如图 12a 所示；现让它们同时从静止开始自由下落，当 A 的下端落到水平硬地（硬地质量 $m_0 >> m_1$）上之后，可发现 B 反弹上升的最大高度 h 比 h_0 大许多倍。不考虑运动相对于竖直方向的偏离，忽略大、小球的线度。假设地面与 A、A 与 B 之间的碰撞依次发生，且两两间碰撞的恢复系数都相等，求此恢复系数 e。

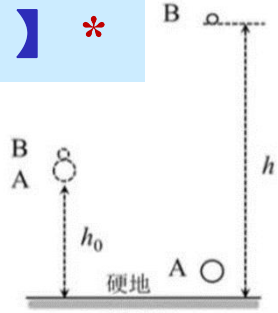


图12a

方法一：地面参考系

恢复系数： $e = \dfrac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$ **A、B在碰撞前具有速度** $v_0 = \sqrt{2gh_0}$

A与地碰撞： $v_{00} = -v_0$ **大地看作不动，** **由** $e = \dfrac{0 - v_1}{-v_0 - 0}$，**得** $v_1 = ev_0$

A与B碰撞： $v_{10} = ev_0$ $v_{20} = -v_0$ **由动量守恒** $m_1 ev_0 - m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

由 $e = \dfrac{v_2 - v_1}{ev_0 + v_0}$，**得** $(e^2 + e)v_0 = v_2 - v_1$

解得 $v_2 = \dfrac{e^2 + 2e - \dfrac{m_2}{m_1}}{\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}} v_0 = \left[\dfrac{(e+1)^2 m_1}{m_1 + m_2} - 1\right] v_0$

代入 $v_2 = \sqrt{2gh}$ $v_0 = \sqrt{2gh_0}$

得 $e = \sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{h}{h_0}} + 1\right)\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}} - 1$

（2）如图 12b，一个儿童玩具由一组大小和质量各不相同的小球 A、B、C 和 D 组成，其中 A 上面固定有一根圆柱形光滑细轻杆，其余 3 个小球都有过其中心的一个圆柱形孔道，孔道的直径略大于细杆的直径。将 B、C 和 D 依次穿在细杆上，将 4 个小球构成的体系移至一定高度后，使之由静止开始下落，已知下落过程中杆始终处于竖直状态。A、B、C 和 D 的质量分别为 m_1、m_2、m_3 和 m_4，设地面与 A、A 与 B、B 与 C、C 与 D 之间的碰撞依次发生，相碰的两两物体间的恢复系数均相等，h_0 为系统初始下落高度，h 为 D 弹起后上升的最大高度，忽略各球的线度。

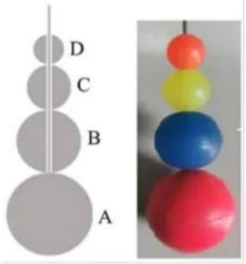


图12b

求恢复系数 e 的表达式；并根据表 12a 给出的数据，求恢复系数 e 的数值。

m_1(g)	m_2(g)	m_3(g)	m_4(g)	h/h_0
76.7	32.5	11.3	5.80	11.2

4个小球在碰前均具有速度

$$v_0=\sqrt{2gh_0}$$

B与C碰撞： $v_{20}=\left[\dfrac{(e+1)^2m_1}{m_1+m_2}-1\right]v_0$

$v_{30}=-v_0$

由动量守恒 $m_2v_{20}-m_3v_0=m_2v_2+m_3v_3$

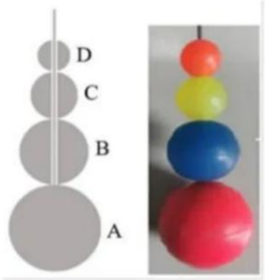
由 $e=\dfrac{v_3-v_2}{v_{20}+v_0}$，**得** $e(v_{20}+v_0)=v_3-v_2$

解得 $v_3=\left[\dfrac{(e+1)^3m_1m_2}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}-1\right]v_0$

考虑C与D碰撞，同理有： $v_4=\left[\dfrac{(e+1)^4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}-1\right]v_0$

代入 $v_4=\sqrt{2gh}$ $v_0=\sqrt{2gh_0}$ **得** $e=\sqrt[4]{\left(\sqrt{\dfrac{h}{h_0}}+1\right)\dfrac{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}{m_1m_2m_3}}-1$

方法二 (随球以速度v_0下落的参考系)：4 个小球的碰前速度均为 0



4个小球在碰前均具有速度

$$v_0=\sqrt{2gh_0}$$

A与地碰撞： $m_0v_0+0=m_0u_0+m_1u_1$ $\qquad e=\dfrac{u_1-u_0}{v_0-0}$

(地球质量m_0，向上运动速度v_0
地球和球A碰后速度分别u_0和u_1) $\Rightarrow$ $u_1=\dfrac{(e+1)m_0}{m_0+m_1}v_0$

A与B碰撞： u_1 为A与B碰撞的初速度 $\quad u_{10}=\dfrac{(e+1)m_0}{m_0+m_1}v_0$

$$m_1u_{10}+0=m_1u_1+m_2u_2 \qquad e=\frac{u_2-u_1}{u_{10}-0}$$

方程形式与第一次碰撞完全相同

$$\Rightarrow u_2=\frac{(e+1)m_1}{m_1+m_2}u_{10}=\frac{(e+1)^2m_0m_1}{(m_0+m_1)(m_1+m_2)}v_0$$

合理选取参照系会给问题处理带来简化，这里每次碰前均有一球处于静止状态，简化了方程求解

以此类推，小球D碰后速度为：

$$u_4=\frac{(e+1)^4m_0m_1m_2m_3}{(m_0+m_1)(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}v_0$$

考虑到地球 $m_0\gg m_1$，有 $\dfrac{m_0}{m_0+m_1}\approx 1$， $u_4=\dfrac{(e+1)^4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}v_0$ $\quad\Rightarrow e$

在该参考系地球以速度v_0向上运动，所以小球D相对于地面的速度为

$$v_4=u_4-v_0=\left[\frac{(e+1)^4m_1m_2m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_3+m_4)}-1\right]v_0$$

二、 质点系的动能定理

对每个质点分别应用质点动能定理:

$$\int_{A_1}^{B_1} (\vec{F}_1 + \vec{f}_1) \cdot d\vec{l}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1B1}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1A1}^2$$

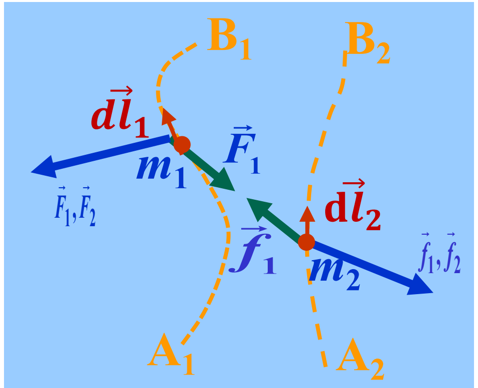
$$\int_{A_2}^{B_2} (\vec{F}_2 + \vec{f}_2) \cdot d\vec{l}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2B2}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2A2}^2$$

质点系的动能定理

$$\boxed{A_{外力} + A_{内力} = \sum \frac{1}{2} m_i v_{i2}^2 - \sum \frac{1}{2} m_i v_{i1}^2}$$

外力总功 + 内力总功 ＝ 系统总动能的增量

两个质点的系统



$\vec{f}_1, \vec{f}_2$ -- 内力

$\vec{f}_1, \vec{f}_2$ -- 外力

- 内力功的和不一定为零 (各质点位移不一定相同)，内力虽不能改变系统动量，但能改变系统动能。
- 内力的功 (“一对力”所做的功)：等于**其中一个质点受的力和该质点相对另一质点的位移的点积**，计算时可认为其中一个质点静止并以该质点所在位置为原点，计算另一质点所受力做的功。

保守力的功及势能

保守力：系统内力所做功只与物体的始末位置有关而与路径无关

保守内力作的功等于系统势能的减小 $W_{AB}=E_{pA}-E_{pB}=-\Delta E_p$

- **重力功：** $W_{AB}=mgh_A-mgh_B$ **重力势能:** $E_p=mgh$
  $(F_h=mg)$ $(E_{p\,h=0}=0)$

- **弹力功：** $W_{AB}=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2$ **弹性势能:** $E_p=\frac{1}{2}kx^2$
  $(F_x=-kx)$ $(E_{p\,x=0}=0)$

- **万有引力功：** $W_{AB}=\left(-\frac{Gm_1m_2}{r_A}\right)-\left(-\frac{Gm_1m_2}{r_B}\right)$ **万有引力势能:** $E_p=-\frac{Gm_1m_2}{r}$
  $\left(\vec{F}_{12}=-\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}\vec{e}_r\right)$ $(E_{p\,r\to\infty}=0)$

- **库仑力功：** $W_{AB}=\frac{kq_1q_2}{r_A}-\frac{kq_1q_2}{r_B}$ **库仑力势能:** $E_p=\frac{kq_1q_2}{r}$
  $\left(\vec{F}_{12}=\frac{kq_1q_2}{r_{12}}\vec{e}_r\right)$ $(E_{p\,r\to\infty}=0)$

机械能守恒定律

保守内力作的功等于系统势能的减小 $W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p$

质点系动能定理 $W_{外} + W_{内} = E_{kB} - E_{kA}$

$W_{内} = W_{内保} + W_{内非}$

$W_{内保} = E_{pA} - E_{pB}$

$$W_{外} + W_{内非} = (E_{kB} + E_{pB}) - (E_{kA} + E_{pA})$$

系统的机械能： $E = E_k + E_p$

功能原理： $W_{外} + W_{内非} = E_B - E_A$

外力和非保守内力做的功等于系统机械能的增量

机械能守恒定律: 当 $W_{外} + W_{内非} = 0$ 时，$E_B = E_A$

只有保守内力做功时系统机械能守恒

➢ 守恒定律的意义

- ✓ 守恒定律 (机械能、动量) 是关于变化过程的规律。

  当满足一定条件下，不必考虑过程的细节，而对系统的初、末状态进行讨论。

- ✓ 当守恒定律不成立时，再考虑动量定理、动能定理、分析力的两个积累效应。

$$\vec{I}_F=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot \mathrm{d}t=\vec{P}_2-\vec{P}_1$$

$$W=\int_A^B\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=E_{k2}-E_{k1}$$

- ✓ 若研究物体瞬时状态，用牛顿运动定律。

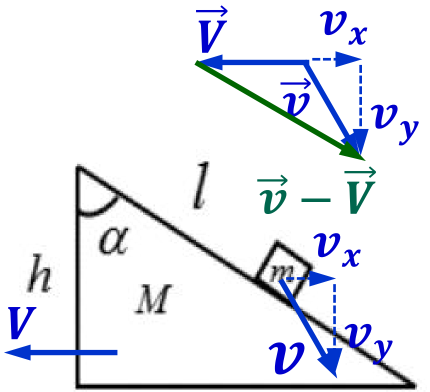
$$\sum_i\vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=m\vec{a}$$

得　分
【29决-8】**

8.（16 分）如图 4 所示，斜面质量为 M，放在光滑水平面上，滑块质量为 m，m 与 M 之间无摩擦力，斜面高 h，长 l，求当 m 从斜面顶端由静止滑到底端时，支持力对 m 所做的功.

水平方向动量守恒： $MV = mv_x$

系统机械能守恒： $mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2$



滑块 m 相对于斜面运动的速度方向沿着斜面(牵连关系)： $\frac{v_x + V}{v_y} = \tan\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{h}$

滑块 m 和斜面M间压力(一对力)垂直于相对运动方向，其对系统做的总功为0

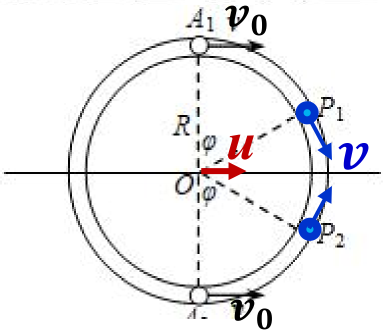
支持力对 m 作的功 $=-$支持力对 M 作的功 $=-\frac{1}{2}MV^2$ ➡ **求解**

9. （20 分）如图所示，由一光滑细管构成一半径为 R 的圆环，放在水平光滑桌面上。管内 A_1、A_2 处有两个质量为 m 的小球，圆形管道的质量是 γm，开始时管道静止，两小球向右以等大的速度开始运动，细管上 P_1、P_2 处有两个缺口（φ 已知），小球自小孔中穿出后，将在平面上某处相遇，求：

【27北京力学决-9】**

（1）相遇时两球与管道中心 O 的距离 l；

（2）从小球穿出缺口直到小球相遇的过程中，管道在平面上移动的路程 s。



（1）管道参考系：小球穿出时以速率 v 沿切线运动： $l=\dfrac{R}{\sin\varphi}$

（2）地面参考系：3 物体组成系统，无外力作用，

水平方向动量守恒: $2mv_0=\gamma mu+2m(v\cos\varphi+u)$

$\Rightarrow v,u$

系统能量守恒: $\dfrac{1}{2}(2m)v_0^2=\dfrac{1}{2}\gamma mu^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2m(v\sin\varphi)^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2m(v\cos\varphi+u)^2$

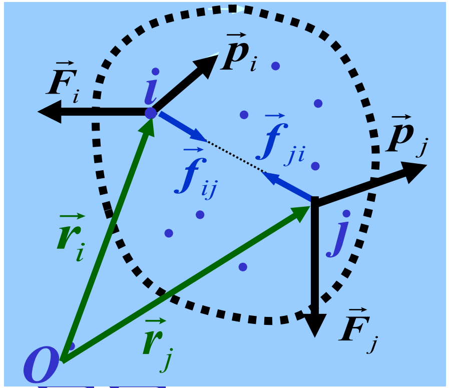
相遇时间: $t=\dfrac{R\cot\varphi}{v}$　　**管道移动路程:** $s=ut$

三、质点系角动量定理

由质点角动量定理

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{i\neq j} \vec{f}_{ij}) = \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

$$\vec{M}_j = \vec{r}_j \times (\vec{F}_j + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ji}) = \frac{d\vec{L}_j}{dt}$$



内力矩 $\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$

$$\sum_i \sum_{i\neq j} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = 0$$

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d}{dt}(\sum_i \vec{L}_i) = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

质点系角动量定律

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

质点系角动量守恒定律 $\vec{M} = 0$

$$\sum_i \vec{L}_{i1} = \sum_i \vec{L}_{i2}$$

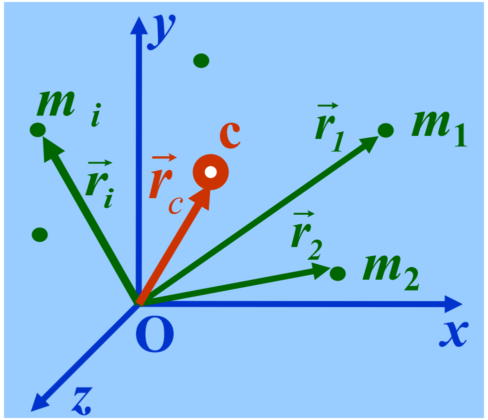
如果对于某一固定点，质点系中所有质点所受**外力矩之和为零时**，则质点系各质点对该固定点的**角动量的矢量和保持不变**。

四、 质心、质心运动定理、质心系

1. 质心的定义：

设质点系共有 N 个质点组成，各质点的质量分别为：$m_1, m_2, \ldots m_i \ldots m_N$ ，

建立坐标系 O-xyz，各质点矢径分别为：$\vec{r}_1, \vec{r}_2 \cdots \vec{r}_i \cdots \vec{r}_N$



质心矢径：

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$$

分量形式：

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{m}$$

同理可写出 y 和 z 分量

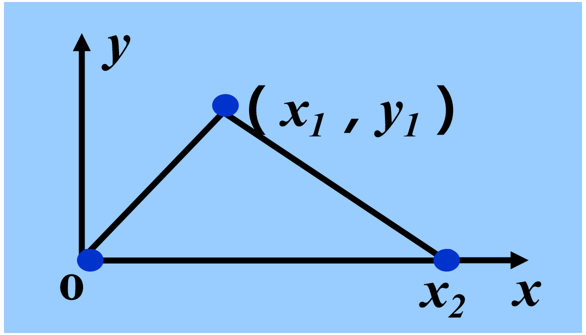
质量连续分布的物体 (分为 $N \to \infty$ 个小质元)

$$x_c = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int x \mathrm{d}m}{m}$$

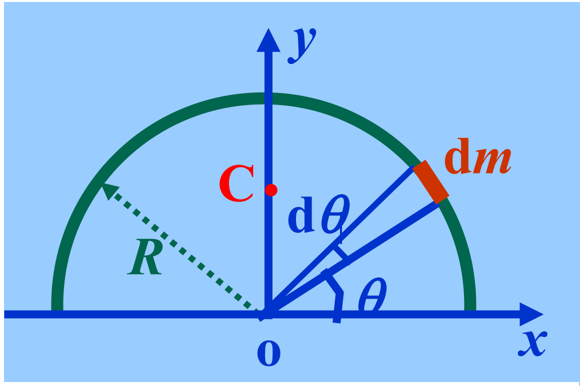
质心位矢与坐标系选取有关。质心相对于各质点的相对位置是不会随坐标系的选择而变化。

例：任意三角形的每个顶点有一质点 m，求质心。

$$x_c=\frac{mx_1+mx_2}{3m}=\frac{x_1+x_2}{3} \qquad y_c=\frac{my_1}{3m}=\frac{y_1}{3}$$



例：求均匀半圆铁环的质心（半径为R）.



由对称性： $x_C=0$，

$$y_C=\frac{\int y\mathrm{d}m}{m}$$

取 θ处 $\mathrm{d}\theta$对应的圆弧质元: $\mathrm{d}m=\frac{m}{\pi R}\cdot R\mathrm{d}\theta=\frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta$

$$y_C=\frac{\int y\mathrm{d}m}{m}=\frac{\int_0^{\pi}R\sin\theta\cdot\frac{m}{\pi}\mathrm{d}\theta}{m}=\frac{2}{\pi}R$$

质心位置为质点系中各质点位置带质量权重的平均值。

2. 质心运动定理

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

质点系的动量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sum m_i \vec{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{r}_c)}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t} = m\vec{v}_c$$

质点系的动量等于它的总质量与质心速度的乘积。

质点系动量定理

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_c) = m\vec{a}_c$$

质心运动定理

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_c}$$

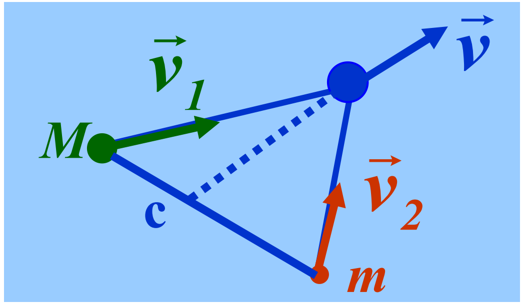
质点系所受合外力等于其总质量与质心加速度的乘积

- 质心运动定理适用于惯性参照系。
- 质点系的运动可看成是把质量和力都集中在质心的一个质点的运动 (随质心的平动)。
- 用质心概念来描述质点系动量定理：合外力的冲量等于质心动量的增量。
- 用质心概念来描述质点系动量守恒定律：当合外力为零时，质心的速度不变。

例：水平桌面两小球 m 和 M，分别以速度 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 匀速运动，某一时刻它们相碰并合为一体，求它们碰后的速度，并说明它们相对于质心是怎么运动的。

解：由动量守恒定律 $m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = (m+M)\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2}{m+M} = \vec{v}_c$$



两小球组成的系统，合外力为零，质心速度不变。

两小球碰前相对于质心的速度：

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{M(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m+M}$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_c = \frac{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m+M}$$

大小相等，方向相反

两体弹性碰撞	
惯性参照系：	质心作匀速直线运动；
质 心 系：	碰前两物体做彼此靠近的相向匀速直线运动，碰后反弹的速率等于碰前的靠近速率。

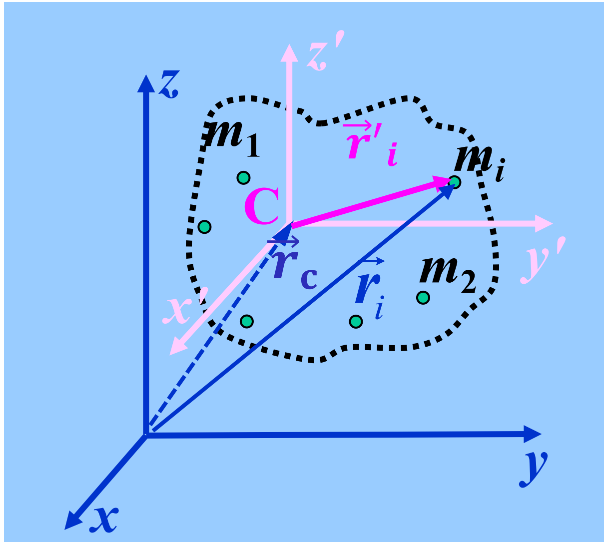
3. 质心参考系

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

质心参考系：以质心为坐标原点随质心平动的坐标系。

质心系中各质点的位置矢量 $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_c$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}' = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_c) = 0$$



求导得：$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}'_i = 0}$$

零动量参考系：质心系可能不是惯性系，在质心系中系统总动量为零，不管外力是否为零，动量守恒定律始终适用。

质心系中各质点的速度 $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_c$

4. 质心参考系中的角动量及角动量定理

$$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i=\sum_i m_i(\vec{r}_c+\vec{r}'_i)\times(\vec{v}_c+\vec{v}'_i)$$

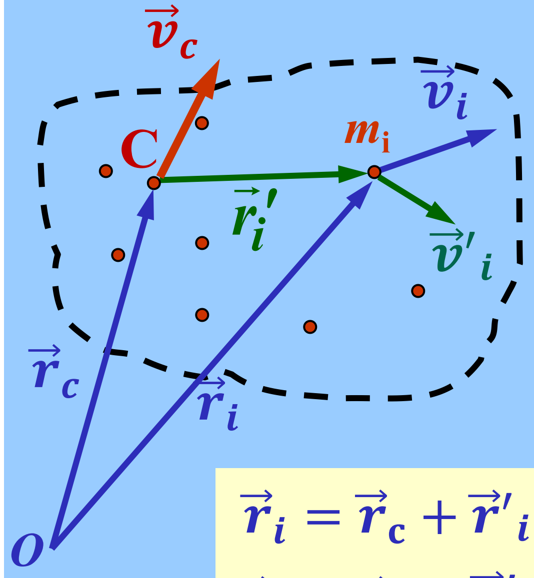
$$=\vec{r}_c\times\underbrace{(m\vec{v}_c)}_{\vec{p}}+\vec{r}_c\times\underbrace{\sum m_i\vec{v}'_i}_{=0}+\underbrace{(\sum m_i\vec{r}'_i)}_{=0}\times\vec{v}_c+\underbrace{\sum m_i\vec{r}'_i\times\vec{v}'_i}_{\vec{L}_c=\sum_i \vec{L}'_i}$$

质点系对惯性系中固定点的角动量：

$$\vec{L}=\underbrace{\vec{r}_c\times\vec{p}}_{\text{轨道角动量}}+\underbrace{\vec{L}_c}_{\text{自转角动量}}$$

随质心的平动 + 绕质心的转动

对惯性系中一点的角动量



$$\vec{r}_i=\vec{r}_c+\vec{r}'_i$$
$$\vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}'_i$$

惯性系角动量定律

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

相对惯性系中的任意固定点

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}_c$$

惯性系中质心运动定理

$$\vec{M}_c=\frac{d\vec{L}_c}{dt}$$

质点系对质心的角动量定理

只相对于质心系中的质心成立

4. 质心参考系中的动能

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}'_i$$

质点系动能的质心表示方法：

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}'_i)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m v_c^2}_{\text{轨道动能}} + \vec{v}_c \cdot \underbrace{\sum m_i \vec{v}'_i}_{=0} + \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i v'^2_i}_{\text{内动能}}$$

柯尼希定理：质点系相对于某一惯性系的总动能等于该质点系的轨道动能和内动能之和。

质点系问题

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

惯性参照系

$$\vec{F}_i+\vec{f}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r}_\mathrm{c}=\frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m}$$

$$\vec{r}_i=\vec{r}_\mathrm{c}+\vec{r}'_i$$

$$\vec{v}_i=\vec{v}_\mathrm{c}+\vec{v}'_i$$

质心参照系

$$\vec{F}_i+\vec{f}_i+(-m_i\vec{a}_\mathrm{c})=\frac{\mathrm{d}\vec{p}'_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}$$

$$\vec{p}=\sum m_i\vec{v}_i=m\vec{v}_\mathrm{c}+\sum m_i\vec{v}'_i$$

$$\sum m_i\vec{v}'_i=0$$

$$\vec{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}$$

$$\vec{L}=\sum\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i=\vec{r}_\mathrm{c}\times m\vec{v}_\mathrm{c}+\sum m_i\vec{r}'_i\times\vec{v}'_i$$

$$\vec{M}_\mathrm{c}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{L}_\mathrm{c}$$

$$A_{总}=\Delta E_\mathrm{k}$$

$$E_k=\sum\frac{1}{2}m_iv_i^2=\frac{1}{2}mv_\mathrm{c}^2+\sum\frac{1}{2}m_iv'^2_i$$

$$A_{总\mathrm{C}}=\Delta E_\mathrm{int}$$

守恒定律

随质心平动 + 绕质心转动 **物体运动图像**

五、刚体定轴转动

刚体绕惯性系中一定轴以角速度 ω 做定轴转动时，刚体同时也绕固定在刚体上且与此定轴平行的任意轴以相同的角速度 ω 转动。

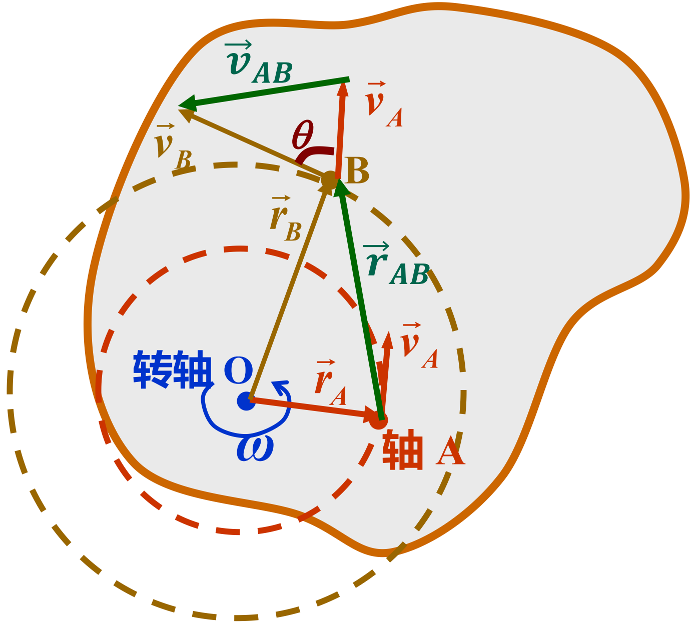
$$\vec{v}_A = \omega r_A \hat{v}_A \qquad \vec{v}_B = \omega r_B \hat{v}_B$$

B 相对于 A 的速度 $\quad \vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

$$|\vec{v}_{AB}| = \sqrt{(\omega r_A)^2 + (\omega r_B)^2 - 2\omega r_A \omega r_B \cos\theta}$$

$$= \omega\sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos\theta} = \omega|\vec{r}_{AB}|$$

方向：垂直于 $\vec{r}_{AB}$



B 相对于 A 轴做角速度为 ω 的圆周运动。

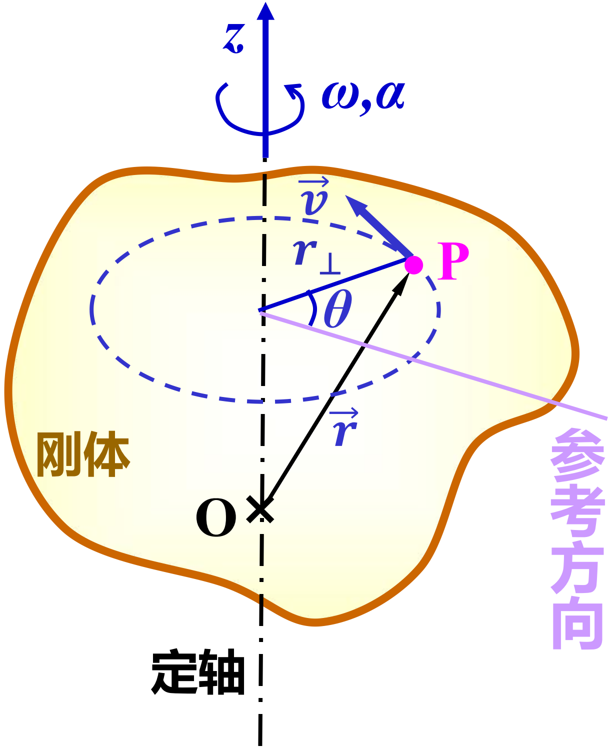
1. 刚体定轴转动的运动学

刚体上任意点都在通过该点并与转轴垂直的平面内作圆周运动，其 $\Delta\theta$、ω、α 相同，刚体定轴转动的自由度数：1 个 (位置角 θ)

角量： $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$　　$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

线量： $v = r_\perp \omega$　　$a_n = r_\perp \omega^2$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r_\perp \alpha$$



对匀加速转动，α = 常数

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

2. 刚体定轴转动定律

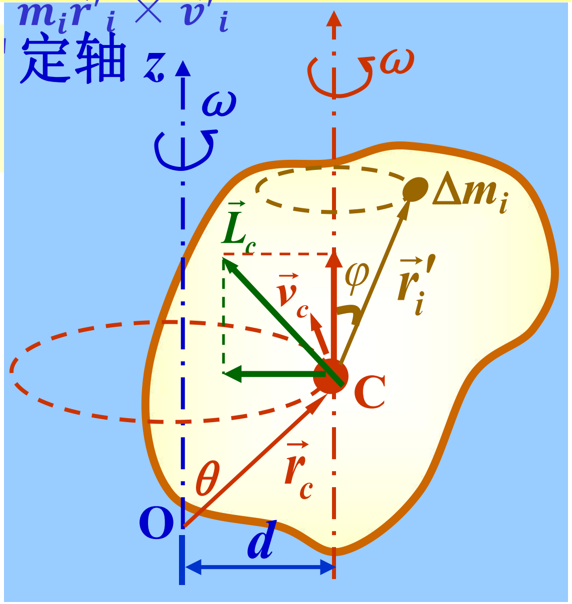
质点系角动量定理 $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{L}=\sum \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$
$$=\vec{r}_c\times m\vec{v}_c+\sum m_i\vec{r}'_i\times\vec{v}'_i$$

$$L_z=(\vec{r}_c\times m\vec{v}_c)_z+\sum(m_i\vec{r}'_i\times\vec{v}'_i)_z$$
$$=r_c m v_c\sin\theta+\sum r'_i\Delta m_i v'_i\sin\phi$$
$$=r_{c\perp}m\omega r_{c\perp}+\sum r'_{i\perp}\Delta m_i\omega r'_{i\perp}$$
$$=(md^2+\sum\Delta m_i r'^2_{i\perp})\cdot\omega=(md^2+J_c)\cdot\omega$$

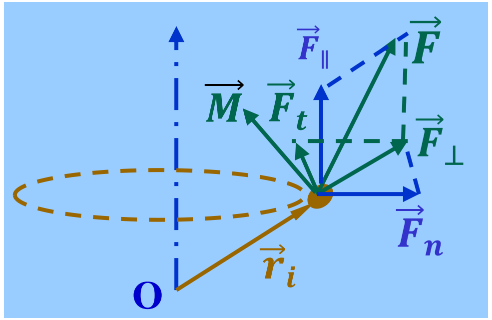
转动惯量 $J=\sum\Delta m_i r_i^2$

平行轴定理 $J=J_c+md^2$



$$L_z=(\sum r_i\times\Delta m_i\vec{v}_i)_z=(\sum\Delta m_i r^2_{i\perp})\cdot\omega=J\cdot\omega$$

$$M_z=(\vec{r}_i\times\vec{F})_z=(\vec{r}_i\times(\vec{F}_\parallel+\vec{F}_\perp))_z=(\vec{r}_i\times\vec{F}_\perp)_z$$
$$=(\vec{r}_i\times(\vec{F}_t+\vec{F}_n))_z=(\vec{r}_i\times\vec{F}_t)_z=r_{i\perp}F_t$$



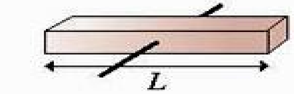
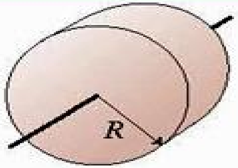
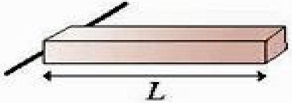
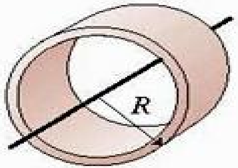
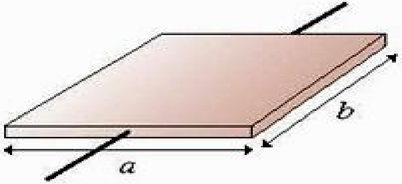
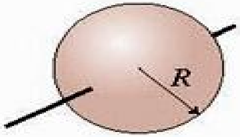
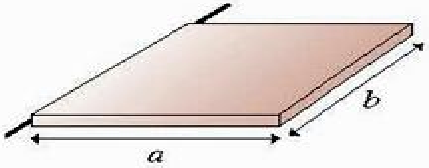
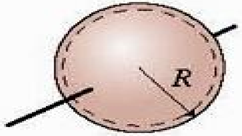
刚体的定轴转动定律

$$\boxed{M_z=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\alpha}$$

刚体所受对某固定转轴的合外力矩等于刚体对该轴的转动惯量与其转动角加速度的乘积。

常见刚体的转动惯量

TABLE 13.3 Moments of inertia of objects with uniform density

Object and axis	Picture	I	Object and axis	Picture	I
Thin rod, about center		$\frac{1}{12}ML^2$	Cylinder or disk, about center		$\frac{1}{2}MR^2$
Thin rod, about end		$\frac{1}{3}ML^2$	Cylindrical hoop, about center		MR^2
Plane or slab, about center		$\frac{1}{12}Ma^2$	Solid sphere, about diameter		$\frac{2}{5}MR^2$
Plane or slab, about edge		$\frac{1}{3}Ma^2$	Spherical shell, about diameter		$\frac{2}{3}MR^2$

3. 刚体定轴转动的角动量定理 (刚体转动中力矩的时间积累效果)

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

冲量矩 $M_z\mathrm{d}t = \mathrm{d}L_z$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_z\mathrm{d}t = J\omega_2 - J\omega_1}$$

$$L_z = J\omega = (\sum \vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i)_z$$

刚体定轴转动的角动量守恒定律

若一质点系所受的对某一固定轴的合外力矩为零，则它对于此固定轴的角动量保持不变。

若 $M_z = 0$， 则 $L_{z1} = L_{z2}$ $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$

- 用于求解刚体与质点或物体的碰撞问题。

4. 刚体的定轴转动动能定理

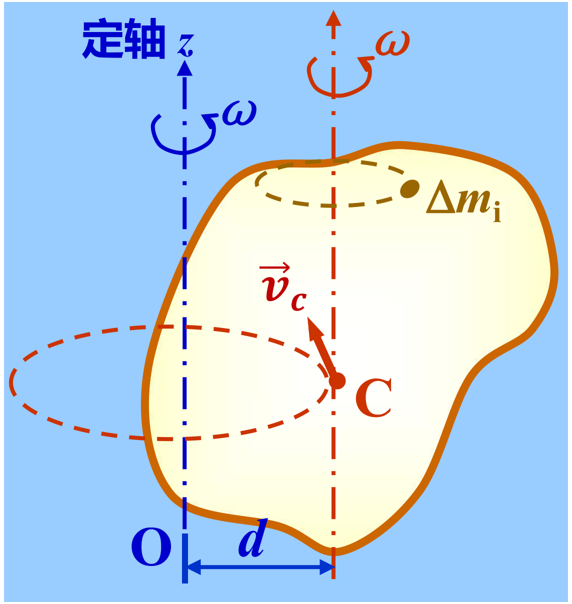
$$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$$

转动动能 $E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v'^2_i$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 r_{c\perp}^2 + \sum \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 r'^2_{i\perp}$$

$$= \frac{1}{2}\left(md^2 + \sum \Delta m_i r'^2_{i\perp}\right) \cdot \omega^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(md^2 + J_c\right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$



对于刚体，内力的功为零

外力的功 $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_t |\mathrm{d}r| = F_t r \mathrm{d}\theta = M \cdot \mathrm{d}\theta$

$$A_{外} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \cdot \mathrm{d}\theta$$

刚体定轴转动的动能定理

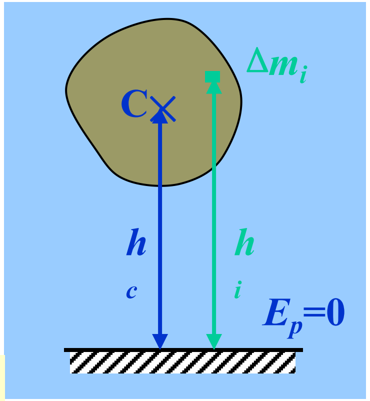
$$A_{外} = \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$$

合外力矩对绕固定轴转动的刚体做的功等于其转动动能的增量。

5. 刚体定轴转动的机械能守恒定律

➢ 刚体的重力势能：刚体各质元重力势能的总和

$$E_{\mathrm{p}} = \sum_i \Delta m_i\, g \cdot h_i = mg\frac{\sum \Delta m_i h_i}{m} = mgh_{\mathrm{c}}$$



刚体的重力势能等于其质量集中在质心时所具有的重力势能

➢ 机械能守恒定律

对于包括刚体在内的体系，若只有保守内力作功则系统机械能守恒。

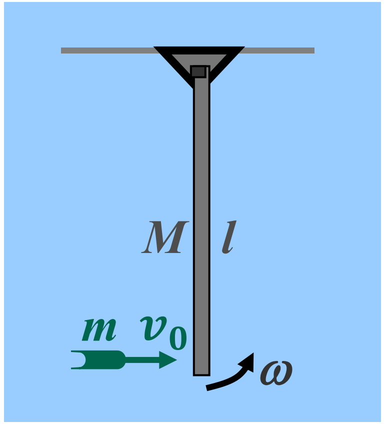
若 $A_{外} + A_{非保守内力} = 0$ 则 $E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = Const.$

Table 9-2

Analogs in Rotational and Linear Motion

Rotational Motion		Linear Motion	
Angular displacement	$\Delta\theta$	Displacement	Δx
Angular velocity	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Velocity	$v = \frac{dx}{dt}$
Angular acceleration	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Acceleration	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Constant angular acceleration equations	$\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\Delta\theta = \omega_{av}\Delta t$ $\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$	Constant acceleration equations	$v = v_0 + at$ $\Delta x = v_{av}\Delta t$ $v_{av} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$
Torque	τ	Force	F
Moment of inertia	I	Mass	m
Work	$dW = \tau\, d\theta$	Work	$dW = F_s\, ds$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Power	$P = \tau\omega$	Power	$P = Fv$
Angular momentum	$L = I\omega$	Momentum	$p = mv$
Newton's second law	$\tau_{net} = I\alpha = \frac{dL}{dt}$	Newton's second law	$F_{net} = ma = \frac{dp}{dt}$

例：均匀直杆 M，长为 l，其一端挂在一个水平光滑轴上而静止在竖直位置。一子弹质量为 m，以水平速度 v_0 射入杆下端而不复出。求子弹和杆一起 运动时的角速度。



解：考虑以子弹和杆组成的系统，所受外力 (重力和轴对杆的作用力) 对转轴的力矩为零，系统角动量守恒:

$$mlv_0 = mlv + \frac{1}{3}Ml^2\omega$$

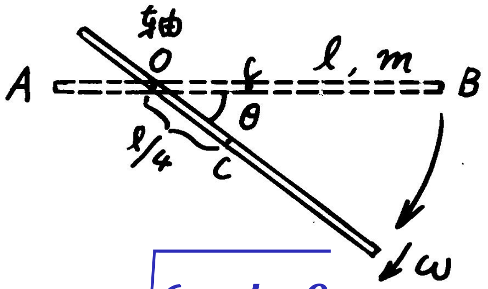
$$v = \omega l$$

$\Rightarrow \omega$

或 $$mlv_0 = (ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2)\omega$$

因为水平方向轴对杆存在作用力，所以动量不守恒。

例：长为 l、质量为 m 的均匀细杆能绕 O 轴无摩擦地转动，$OC=\frac{l}{4}$ ，初始时杆水平且静止。求杆下摆θ角后，杆转动的角速度 ω 及转轴对杆的作用力 $\vec{N}$。

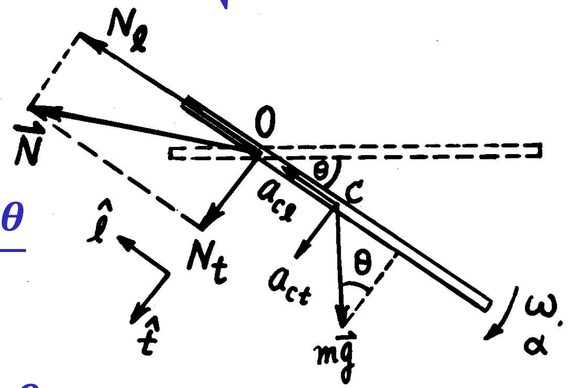


过程中只有重力作功，系统**机械能守恒**。

设初始位置势能为 0，则 $\frac{1}{2}J_o\omega^2 - mg\frac{l}{4}\sin\theta = 0$

由平行轴定理 $J_o = J_c + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{4})^2 = \frac{7}{48}ml^2$

$\Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{6g\sin\theta}{7l}}$



应用**质心运动定理**：

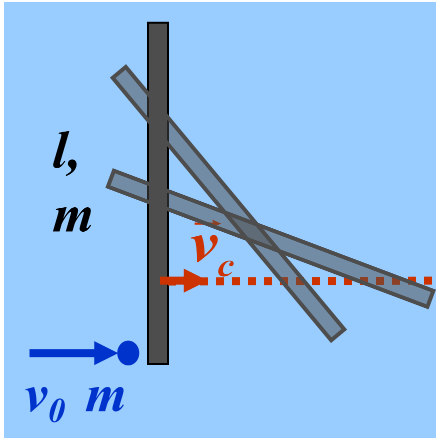
法向 $\hat{l}$: $N_l - mg\sin\theta = ma_{cl}$

切向 $\hat{t}$: $N_t + mg\cos\theta = ma_{ct}$

$$a_{cl} = \omega^2\frac{l}{4} = \frac{6}{7}g\sin\theta \qquad a_{ct} = \frac{l}{4}\alpha = \frac{l}{4}\cdot\frac{\frac{l}{4}\cdot mg\cos\theta}{J_o} = \frac{3mg\cos\theta}{7}$$

$$\Rightarrow \quad N_l = \frac{13}{7}mg\sin\theta \qquad N_t = -\frac{4}{7}mg\cos\theta$$

例：一光滑水平面上静放一长为 l，质量为 m 的细直杆，今有一质量也为 m 的质点，在与杆垂直的方向上以 v_0 运动，并在杆的一端和杆发生完全非弹性碰撞，求(1) 碰后质心的速度和转动的角速度；(2) 碰撞过程中损失多少机械能。



解 (1) 碰前后动量守恒: $m\vec{v}_0 = 2m\vec{v}_c$ $\quad \vec{v}_c = \dfrac{1}{2}\vec{v}_0$

碰前、后角动量守恒 (对质心或对惯性系中任意固定点)

- 对质心： $mv_0\dfrac{l}{4} = J\omega$ $\quad J = \dfrac{1}{12}ml^2 + m(\dfrac{l}{4})^2 + m(\dfrac{l}{4})^2$
- 对碰前杆的上端点所在位置： $mv_0 l = 2mv_c\dfrac{3}{4}l + J\omega$

$\Rightarrow \omega$

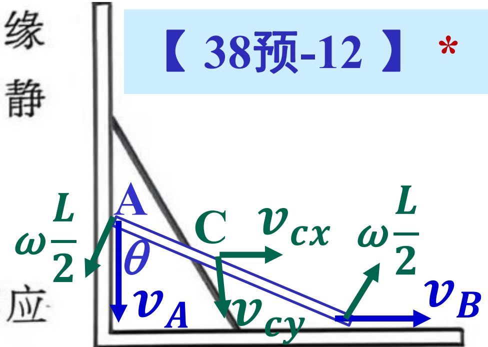
(2) 碰前后损失机械能为： $\dfrac{1}{2}mv_0^2 - (\dfrac{1}{2}2mv_c^2 + \dfrac{1}{2}J\omega^2)$

12. 如图所示，长度为 L、质量为 m 的均匀金属杆两端靠在直角绝缘导轨的两臂上，导轨的两臂分别沿水平与竖直方向.初始时刻金属杆静止，与竖直导轨成 30°角.不计一切摩擦.

(1) 试求当杆下滑到与竖直导轨成 60°角时杆的质心的速度；

(2) 假设存在垂直于导轨所在平面(纸面)向里的均匀磁场，磁感应强度大小为 B，求当杆下滑到与竖直导轨成 60°角时杆两端的感应电动势

【 38预-12 】 *



题 12 图

(1) 只有重力做功，机械能守恒：$mg\frac{L}{2}\sin60° = mg\frac{L}{2}\sin30° + \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

杆下滑的牵连条件： $v_c = \omega\frac{L}{2}$ $\quad I = \frac{1}{12}mL^2 \quad \Rightarrow v_c$

证明：A、B点运动 = 随质心平动 + 绕质心转动

由$v_{Ax} = 0$，有 $v_{cx} = \omega\frac{L}{2}\cos\theta$ $\quad \Rightarrow v_c = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2} = \omega\frac{L}{2}$

由$v_{By} = 0$，有 $v_{cy} = \omega\frac{L}{2}\sin\theta$ $\quad \tan\varphi = \frac{v_{cy}}{v_{cx}} = \tan\theta$

(2) 由上可知$\vec{v}_c$与x轴夹角为θ，即下滑到与竖直导轨成60°时，$\vec{v}_c$与其成 30°角

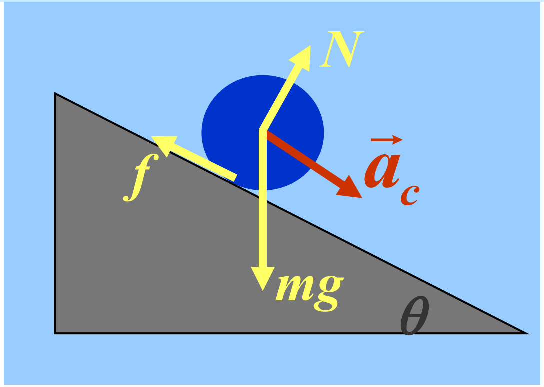
例 ：半径为 R 质量为 m 的均匀实心圆柱体，沿倾角为 θ 的斜面无滑动滚下，求圆柱体的受力大小及质心的加速度。

解：随质心平动： $mg\sin\theta - f = ma_c$

绕质心转动： $fR = J_c\alpha$

纯滚动牵连条件：$a_c = R\alpha \quad v_c = \omega R$

$\rightarrow a_c, f$



- 刚体的纯滚动可以看做是绕瞬时轴(过接触点)的转动，如果支撑面是固定在惯性系上的，也可以对瞬时轴应用转动定律。

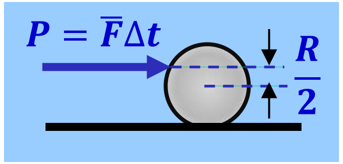
- 纯滚动中刚体与支撑面接触处的速度为零，作用于刚体的为静摩擦力，不做功，机械能守恒。滚动动能为：

$$E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega$$

二、（40 分）一质量为 m、半径为 R 的均质实心母球静置于水平桌面上，母球与桌面之间的滑动摩擦因数为 μ。将球杆调整到位于过球心的竖直平面内保持水平，并击打母球上半部，球杆相对于球心所在水平面的高度为 $R/2$，击打时间极短；母球获得的冲量大小为 P，方向水平。假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力。重力加速度大小为 g 。

【 38复-2 】 * *

（1）问击打后经过多长时间母球开始做纯滚动？求母球达到纯滚动时球心的运动速度；



(1) 击打过程

动量定理 (随质心平动)： $P=mv_{c0}-0$ $\quad v_{c0}=\dfrac{P}{m}$

角动量定理 (绕质心转动)：$P\dfrac{R}{2}=\dfrac{2}{5}mR^2\omega_0-0$ $\quad \omega_0=\dfrac{5P}{4mR}$

与桌面接触点 B 的速度为： $v_B=v_c-\omega R=-\dfrac{P}{4m}$ 方向与球运动方向相反，球运动中受到向前摩擦力： $f=\mu mg$

滚动过程

质心运动定律 (随质心平动)： $\mu mg=ma_c$ $\quad a_c=\mu g$ $\quad v_{ct}=\dfrac{P}{m}+\mu gt$

转动定理 (绕质心转动)： $-\mu mgR=\dfrac{2}{5}mR^2\alpha$ $\quad \alpha=-\dfrac{5\mu g}{2R}$ $\quad \omega_t=\dfrac{5P}{4mR}-\dfrac{5\mu g}{2R}t$

当 $v_{ct}=\omega_t R$ 时，母球开始做纯滚动，即 $\dfrac{P}{m}+\mu gt=\left(\dfrac{5P}{4mR}-\dfrac{5\mu g}{2R}t\right)R$ $\quad t=\dfrac{P}{14\mu mg}$

此时母球球心的运动速度为 $v_c=\dfrac{P}{m}+\mu g\cdot\dfrac{P}{14\mu mg}=\dfrac{15P}{14m}$

（2）记母球达到纯滚动时（以此时刻为计时零点）母球上与桌面接触点为B，求此后的t'时刻球上B点的位置、速度与加速度。

(2) 开始纯滚动后，母球与桌面无相对滑动，由于球不受其他外力，接触点处静摩擦力为0，球匀速滚动，质心平动速度和绕质心转动角速度分别为：

$$v_C=\frac{15P}{14m}\qquad \omega=\frac{15P}{14mR}$$

以0时刻球心位置为坐标原点，向前方向为x'轴，竖直向上为y'轴，t'时刻球心的位置为：

$$x'=v_C t'=\frac{15P}{14m}t'\qquad y'=0$$

t'时刻B点与球心连线绕球心转过的角度为：

$$\theta'=\omega t'=\frac{15P}{14mR}t'$$

B点位置：

$$x'_B=x'-R\sin\theta'=\frac{15P}{14m}t'-R\sin\frac{15Pt'}{14mR}\qquad y'_B=-R\cos\theta'=-R\cos\frac{15Pt'}{14mR}$$

B点速度：

$$v'_{Bx}=\frac{dx'_B}{dt'}=\frac{15P}{14m}\left(1-\cos\frac{15Pt'}{14mR}\right)\qquad v'_{By}=\frac{dy'_B}{dt'}=\frac{15P}{14m}\sin\frac{15Pt'}{14mR}$$

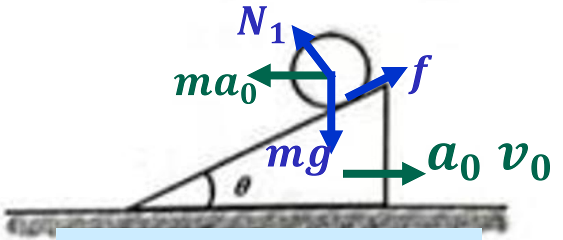
$$\vec{v}'_B=v'_{Bx}\vec{i}+v'_{By}\vec{j}$$

B点加速度：

$$a'_{Bx}=\frac{dv'_B}{dt'}=\left(\frac{15P}{14m}\right)^2\frac{1}{R}\sin\frac{15Pt'}{14mR}\qquad a'_{By}=\frac{dv'_B}{dt'}=\left(\frac{15P}{14m}\right)^2\frac{1}{R}\cos\frac{15Pt'}{14mR}$$

$$\vec{a}'_B=a'_{Bx}\vec{i}+a'_{By}\vec{j}$$

三、（40 分）如图 3a，倾角为 θ、质量为 M 的三角形楔块放在光滑的水平地面上，其斜面上有一个质量为 m、半径为 r 的匀质圆球，让该球从静止开始自由向下运动，整个过程中楔块无转动。重力加速度大小为 g，假设圆球与楔块之间的静摩擦因数和滑动摩擦因数均为 μ。



【 40复-3 】 * *

（1）若 μ 足够大，使得球无滑动地滚下，求：

（i）楔块相对于地面的加速度的大小 a_0；

（ii）匀质圆球质心相对于楔块的加速度的大小 a_c；

（iii）地面对楔块的支持力的大小 N；

（iv）楔块对圆球的支持力的大小 N_1；

（v）为了使匀质圆球保持无滑滚动，球与楔块之间摩擦因数 μ 的最小可能值 μ_0；

（2）若 μ 小于第（1）（v）问中的 μ_0，且楔块斜面足够长，求圆球从静止开始运动一段时间 Δt 后，圆球上与楔块接触的点 P 相对于楔块的速度。

楔块参考系：球沿斜面滚下，轨迹确定，引入惯性力，列出球的平动和转动方程(惯性力通过球心，不影响转动定理的形式)，再考虑惯性系下系统动量守恒，进行求解。

惯性系下系统动量守恒：考虑相对运动用楔块系中的运动参量表示出。（这类下滑问题中必用！）

(1) 楔块系：球的平动：$\boxed{ma_c = ma_0\cos\theta + mg\sin\theta - f}$

转动：$\boxed{fr = I\alpha}$ $I = \dfrac{2}{5}mr^2$　$a_c = r\alpha \Rightarrow f = \dfrac{2}{5}ma_c$

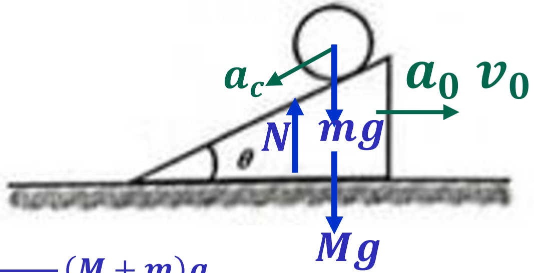
地面系：体系水平方向动量守恒：$\boxed{m(v_c\cos\theta - v_0) = Mv_0}$

两边对时间求导，得：$m(a_c\cos\theta - a_0) = Ma_0$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{\frac{5}{7}mg\sin\theta\cos\theta}{M + m + \frac{5}{7}m\cos^2\theta}$$

$$a_c = \frac{\frac{5}{7}(M+m)g\sin\theta}{M + m - \frac{5}{7}m\cos^2\theta}$$

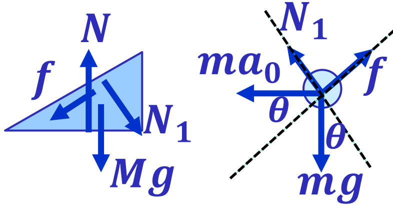
$$a_0=\frac{\frac{5}{7}mg\sin\theta\cos\theta}{M+m+\frac{5}{7}m\cos^2\theta}\qquad a_c=\frac{\frac{5}{7}(M+m)g\sin\theta}{M+m-\frac{5}{7}m\cos^2\theta}\qquad f=\frac{2}{5}ma_c$$



方法1：地面系，楔块和球组成系统竖直方向质心运动定理

$$(M+m)g-N=(M+m)\frac{m(a_c\sin\theta-0)+M\cdot 0}{M+m}\;\Rightarrow\; N=\frac{M+\frac{2}{7}m}{M+m-\frac{5}{7}m\cos^2\theta}(M+m)g$$

方法2(隔离物体法)：楔块竖直方向受力平衡： $N=Mg+f\sin\theta+N_1\cos\theta$



球垂直于斜面方向(楔块系)受：力平衡 $N_1+ma_0\sin\theta=mg\cos\theta$

最小摩擦系数： $\mu_0=\dfrac{f}{N_1}=\dfrac{\frac{2}{5}ma_c}{N_1}=\dfrac{2(M+m)}{7M+2m}\tan\theta$ $\Rightarrow$ $N_1=\dfrac{M+\frac{2}{7}m}{M+m-\frac{5}{7}m\cos^2\theta}mg\cos\theta$

(2)$\mu<\mu_0$, 又滑又滚，重新列方程 (注意不能用上面结果)：

又滑又滚时，小球的平动和转动完全无关，不能联立求解，小球的平动只能通过平动方程和动量守恒进行求解，结果更具普遍性

楔块系，球的平动： $ma_c=ma_0\cos\theta+mg\sin\theta-\mu N_1$

$N_1+ma_0\sin\theta=mg\cos\theta$

地面系，水平方向动量守恒： $m(a_c\cos\theta-a_0)=Ma_0$

$\Rightarrow a_c\quad N_1$

楔块系，转动方程： $\mu N_1 r=\frac{2}{5}mr^2\alpha\;\Rightarrow\;\alpha$

接触点P相对于楔块速度为： $v_P=v_c-\omega r$
$=a_c\Delta t-r\alpha\Delta t$

39复-3**

三、（40 分）如图 3a，将质量为 m 、半径为 R 的匀质实心球从倾角为 θ 的无限长固定斜面上发射，已知球心初速度垂直于斜面，大小为 V ，球初始的自转角速度为零。为方便描述实心球此后的运动，在斜面参考系中建立如图 3a 所示的平面直角坐标系，其中 x 轴沿斜面向下，y 轴垂直于斜面向上。假设球与斜面的碰撞是弹性的，碰撞时间极短，且碰撞前、后的瞬间球垂直于斜面的速度大小不变。进一步假设斜面足够粗糙，以至于在球与斜面的碰撞过程中，其间摩擦力足够大、接触点无相对滑动。已知球绕其直径的转动惯量为 $I=\frac{2}{5}mR^2$，求

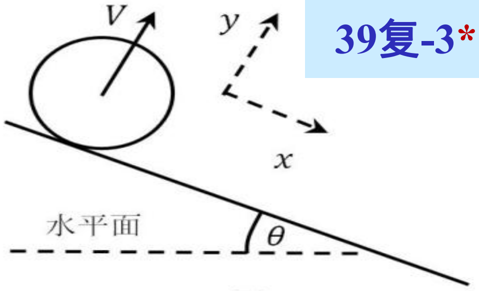


图 3a

（1）第 1 次碰撞前的球心速度和球的自转角速度；

（2）第 1 次碰撞后的球心速度和球的自转角速度；

（3）第 n 次碰撞后球心沿着 x 轴方向的速度以及球的自转角速度；

（4）前 n 次碰撞过程中斜面对球施加的总冲量。

$a_x = g\sin\theta \qquad a_y = -g\cos\theta$

$v_x = g\sin\theta\cdot t \qquad v_y = V - g\cos\theta\cdot t$

第1次碰撞前：$v_{1y} = -V$ ➡ **两次碰撞球运动时间：**$t = \dfrac{2V}{g\cos\theta}$

$v_{1x} = g\sin\theta\cdot t = 2V\tan\theta$

撞前运动过程只受重力：$\omega_1 = 0$

(2) 第1次碰撞过程

x方向动量定理：$-\bar{f}\Delta t = mv'_{1x} - m2V\tan\theta$

转动定理：$\bar{f}R\Delta t = I\omega'_1 - 0 \quad I = \dfrac{2}{5}mr^2$

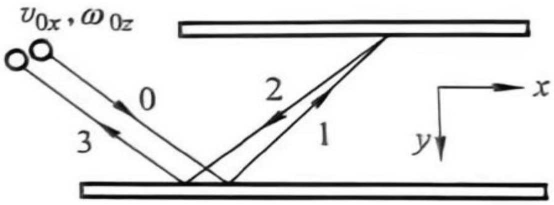
$\Rightarrow v'_{1x} - 2V\tan\theta = -\dfrac{2}{5}R\omega'_1$

动能守恒：$\dfrac{1}{2}m(2V\tan\theta)^2 = \dfrac{1}{2}m(v'_{1x})^2 + \dfrac{1}{2}I(\omega'_1)^2$

$(v'_{1x})^2 - (2V\tan\theta)^2 = -\dfrac{2}{5}R^2(\omega'_1)^2$

➡ $v'_{1x} = \dfrac{6}{7}V\tan\theta \qquad \omega'_1 = \dfrac{20}{7R}V\tan\theta$

三、如图所示，一个半径为 r 的均质超球在上、下两个固定的平行硬板之间弹射，与两板接连碰撞 3 次后，几乎返回原处；取 x 轴水平向右，y 轴竖直向下，z 轴正向按右手螺旋法则确定.开始时球心速度的水平分量为 v_{0x}，z 方向的分量为 0，球绕过球心的轴(平行于 z 轴)的角速度大小为 ω_{0z}（$\omega_{0z}<v_{0x}/r$）.不考虑重力.



38复-3 **

(1) 求超球与板第 1 次碰撞后球心速度的水平分量 v_{1x} 和球转动的角速度 ω_{1z}；

(2) 求超球与板第 2 次碰撞后球心速度的水平分量 v_{2x} 和球转动的角速度 ω_{2z}；

(3) 求超球与板第 3 次碰撞后球心速度的水平分量 v_{3x} 和球转动的角速度 ω_{3z}.

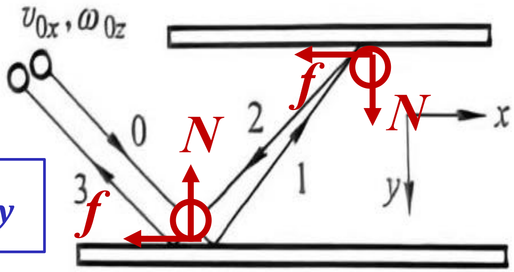
提示：已知一质量为 m、半径为 r 的均质球体绕过球心的轴的转动惯量为 $J=2mr^2/5$. 超球是一种硬质橡皮球体，它在硬板面上的反跳可视为是完全弹性的，即在接触点无滑动，它在接触点受到静摩擦力与正压力时产生的切向形变和法向形变可视为是弹性的，为简化起见，假设这两种形变是彼此无关的(因而相应的弹力均为保守力).

平动 + 转动的弹性碰撞:

竖直方向：应用动量定理和能量守恒定律；

水平方向(受静摩擦力)：动量定理、角动量定理和能量守恒定律。

利用同一力(这里是摩擦力)的力冲量和力矩冲量联立列方程，注意需要判断每次碰撞时球与板接触点处摩擦力的方向



(1) 第1次碰撞： $\because \omega_{0z} < \dfrac{v_{0x}}{r}$ $v_{0x} - r\omega_{0z} > 0$

$\therefore$ 无论ω_{0z}正负，球与下板接触点的速度向右，摩擦力 f 方向向左

y 方向: $-\bar{N}\Delta t = mv_{1y} - mv_{0y}$ $\dfrac{1}{2}mv_{1y}^2 = \dfrac{1}{2}mv_{0y}^2$ ➡ $\boxed{v_{1y} = -v_{0y}}$

x 方向:

$$\left.\begin{aligned} -\bar{f}\Delta t &= mv_{1x} - mv_{0x} \\ \bar{f}r\Delta t &= I\omega_{1z} - I\omega_{0z} \end{aligned}\right\} m(v_{1x} - v_{0x}) = -\frac{I}{r}(\omega_{1z} - \omega_{0z})$$

$$\frac{1}{2}mv_{1x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{1z}^2 = \frac{1}{2}mv_{0x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{0z}^2 \qquad I = \frac{2}{5}mr^2$$

$$m(v_{1x} + v_{0x})(v_{1x} - v_{0x}) = -I(\omega_{1z} + \omega_{0z})(\omega_{1z} - \omega_{0z})$$

$$v_{1x} + v_{0x} = (\omega_{1z} + \omega_{0z})r$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{1x} &= \frac{3}{7}v_{0x} + \frac{4}{7}r\omega_{0z} \\ \omega_{1z} &= \frac{10}{7}\frac{v_{0x}}{r} - \frac{3}{7}\omega_{0z} \end{aligned}}$$

(2) 第2次碰撞： $\omega_{1z} > 0$

$\therefore$ 球上与上板接触点的速度 $v_{1x} + r\omega_{1z} > 0$，方向向右，摩擦力 f 方向向左

x 方向

$$\left.\begin{aligned} -\bar{f}\Delta t &= mv_{2x} - mv_{1x} \\ -\bar{f}r\Delta t &= I\omega_{2z} - I\omega_{1z} \\ \frac{1}{2}mv_{2x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{2z}^2 &= \frac{1}{2}mv_{1x}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{0z}^2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} v_{2x} - v_{1x} &= \frac{2}{5}(\omega_{2z} - \omega_{1z})r \\ v_{2x} + v_{1x} &= -(\omega_{2z} + \omega_{1z})r \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_{2x} &= \frac{3}{7}v_{1x} - \frac{4}{7}r\omega_{1z} \\ \omega_{2z} &= -\frac{10}{7}\frac{v_{1x}}{r} - \frac{3}{7}\omega_{1z} \end{aligned}}$$

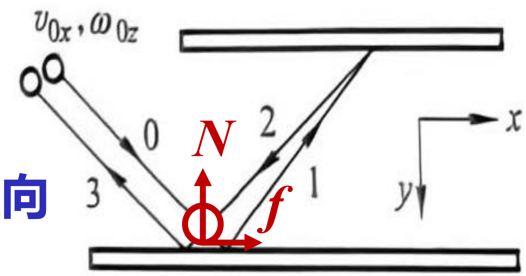
y 方向同理：

$$\boxed{v_{2y} = -v_{1y}}$$

(3) 第3次碰撞：

$$\because\ v_{2x}+v_{1x}=-(\omega_{2z}+\omega_{1z})r$$

$$v_{2x}+\omega_{2z}r=-(v_{1x}+\omega_{1z}r)<0$$



$\therefore$ **碰撞时球上与下板接触点的速度方向沿 x 负向，摩擦力 f 沿 x 正向**

x 方向:

$$\left.\begin{aligned}\bar{f}\Delta t&=mv_{3x}-mv_{2x}\\ -\bar{f}r\Delta t&=I\omega_{3z}-I\omega_{2z}\end{aligned}\right\}\ m(v_{3x}-v_{2x})=-\frac{I}{r}(\omega_{3z}-\omega_{2z})$$

$$\frac{1}{2}mv_{3x}^2+\frac{1}{2}I\omega_{3z}^2=\frac{1}{2}mv_{2x}^2+\frac{1}{2}I\omega_{2z}^2 \qquad I=\frac{2}{5}mr^2$$

$$m(v_{3x}+v_{2x})(v_{3x}-v_{2x})=-I(\omega_{3z}+\omega_{3z})(\omega_{3z}-\omega_{2z})$$

$$v_{3x}+v_{2x}=r(\omega_{3z}+\omega_{2z})$$

y 方向同理: $\boxed{v_{2y}=-v_{1y}=v_{0y}}$

依次代入前面结果可得具体表达式

$$\boxed{\begin{aligned}v_{3x}&=\frac{3}{7}v_{2x}+\frac{4}{7}r\omega_{2z}\\ \omega_{3z}&=\frac{10}{7}\frac{v_{2x}}{r}-\frac{3}{7}\omega_{2z}\end{aligned}}$$

列方程及结果讨论时注意：

1. **力和力矩的符号**按照其方向是否与坐标轴正向一致用**正号**或**负号**来表示。
2. **动量和角动量的方向则含在v_x和 ω_z的符号中**，所得结果如果大于 0，则其方向与相应坐标轴的正向相同，反之则反。

谢 谢 大 家！